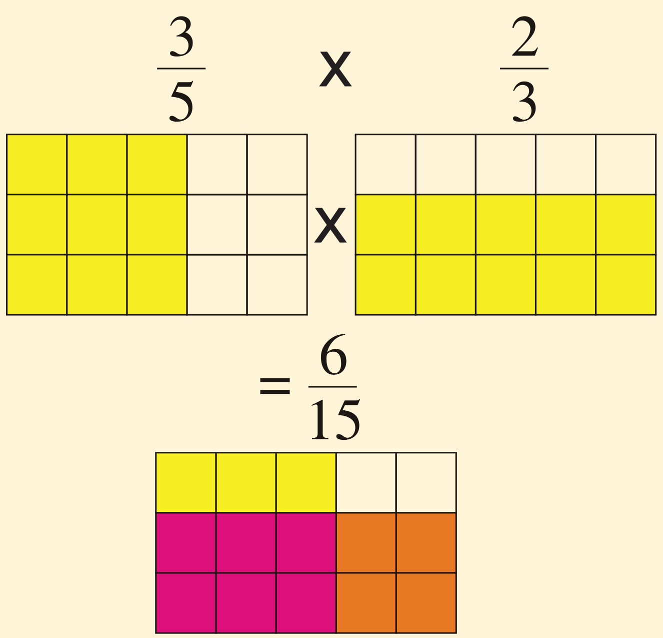
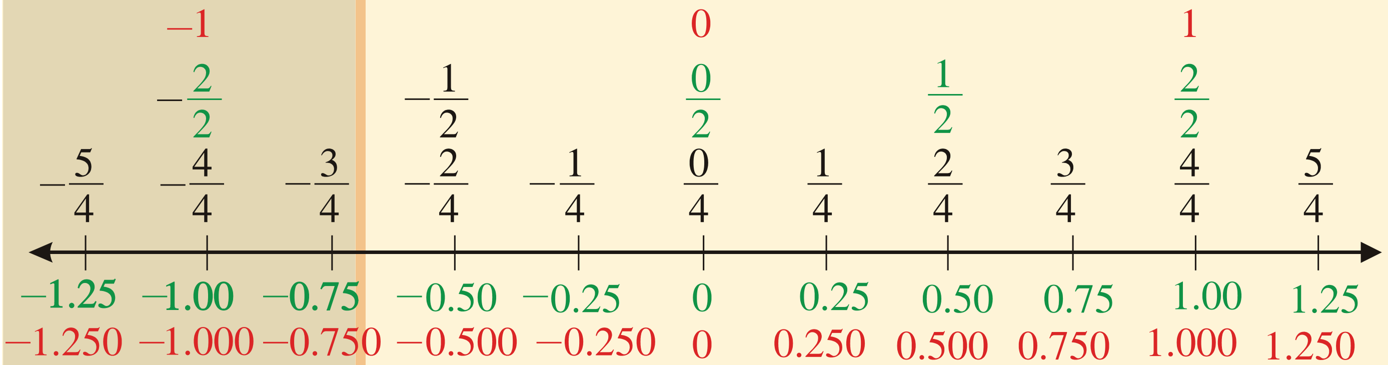
جمهوری اسلامی افغانستان
وزارت معارف
ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی

ریاضی

صنف ۱۰

(برای مدارس دینی)





curriculum@moe.gov.af

۱۳۹۸ هـ.ش

ریاضی
صنف دهم

برای مدارس دینی

۱۳۹۸
هـ . ش.

مؤلف

- پوهنیار عبیدالله صافی متخصص ریاضیات پروژۀ انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ایدیت علمی و مسلکی

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی.
- پوهنیار عبیدالله صافی متخصص ریاضیات پروژۀ انکشاف نصاب تعلیمی

ایدیت زبانی

- معاون سرمولف عبدالرزاق کوهستانی مدیر دیپارتمنت ادیتوران

کمیتۀ دینی، سیاسی و فرهنگی

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی
- محمد آصف کوچی متخصص دیپارتمنت تعلیمات اسلامی

إشراف

- دکتور شیر علی ظریفی رئیس پروژۀ انکشاف نصاب تعلیمی.


بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحیم

پیام وزیر معارف

الحمدلله رب العالمین والصلاة والسلام علی رسوله محمد وعلی آله وأصحابه أجمعین، أما بعد:

نصاب تعلیمی معارف، اساس نظام تعلیم و تربیه را تشکیل داده و در رشد و توسعهٔ علمی، فکری و سلوکی نسلهای امروز و فردای کشور نقش بنیادی و سرنوشت ساز دارد.

نصاب تعلیمی با گذشت زمان، تحول و پیشرفت در عرصه های مختلف زنده گی، مطابق با نیازهای جامعه، باید هم از نظر مضمون و محتوا و هم از نظر شیوه و روش عرضهٔ معلومات، تطور و انکشاف نماید.

یکی از عرصه های نصاب تعلیمی که مورد توجه جدی برای تجدید نظر و بهبود می باشد، نصاب تعلیمات اسلامی است؛ زیرا از یک جانب، فارغان مدارس دینی به حیث پیشوایان معنوی جامعه، باید محور تلاشهای معارف قرار گیرند و از سوی دیگر نصاب تعلیمات اسلامی شامل عقاید، احکام و هدایات دین مبین اسلام است که به حیث نظام و قانون مکمل، تمام ابعاد زنده گی انسان ها را در بر گرفته و به عنوان آخرین پیام خالق و پروردگار جهان تا روز قیامت، رسالت رهنمایی و هدایت بشریت را انجام می دهد.

علمای امت اسلامی در طول تاریخ نقش مهمی را در ایجاد، توسعه و غنامندی سیستم تعلیمات و معارف اسلامی مخصوصاً انکشاف تدریجی نصاب تعلیمی مراکز و مؤسسات علمی جهان اسلام، ایفاکرده اند.

مطالعهٔ دقیق در سیر تطور تاریخی علوم و معارف اسلامی در جهان نشان میدهد که نصاب تعلیمی مدارس و مراکز علمی ما، همواره بنا بر ضرورت های جامعه و در تطابق با احکام ثابت و پا بر جای دین اسلام، که برای همهٔ انسانها در همهٔ زمانها و مکانها می باشد، توسعه یافته است.

کشور عزیز ما افغانستان با سابقهٔ درخشان علمی، روزگاری مهد علم و دانش و جایگاه بزرگترین مراکز علمی عصر بوده و در شکل گیری تمدن بزرگ اسلامی نقش عظیمی داشته است، وجود هزاران دانشمند و عالم در عرصه های مختلف علم و فرهنگ مخصوصاً در علوم شرعی؛ مانند: عقاید، تفسیر، حدیث، فقه، اصول فقه و غیره، گواه واضح آنچه گفته شد می باشد.

همزمان با رشد بیداری اسلامی در عصر حاضر، تعلیمات اسلامی در کشور ما شاهد تحول کمی و کیفی بوده و اطفال و جوانان کشور ما با شوق و رغبت فراوان به طرف مدارس و مراکز تعلیمات اسلامی رو می آورند.

وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان بر اساس مسؤولیت ورسالت خویش، در مطابقت با احکام قانون اساسی کشور، به منظور رشد و توسعهٔ کمی و کیفی تعلیمات اسلامی و از جمله نصاب آن، اقدامات قابل توجه نموده است.

در این راستا وزارت معارف با دعوت از علماء، استادان و متخصصان باتجربه و قابل اعتماد کشور، به بهبود و انکشاف نصاب تعلیمی پرداخته و کتابهای رایج مدارس تعلیمات اسلامی را با شرح و توضیح متون، جا به جا ساختن فعالیتها، ارزیابی و تمرینها با معیارهای کتب درسی عیار ساخت.

امیدوارم این تلاشهای قابل تمجید علماء و متخصصان وزارت معارف، در بهبود و انکشاف هر چه بیشتر تعلیمات اسلامی در افغانستان عزیز مفید واقع شده وسبب کسب رضای خداوند متعال قرار گیرد.

وبالله التوفیق

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

مقدمه

استادان عالیقدر و شاگردان گرامی،

ریاضی زبان علوم طبیعی است و قوانینی را که خداوند در طبیعت حاکم ساخته فورمول بندی می کند همچنان مسائل مربوط به اعداد و مقادیر را به زبان حساب ارائه می نماید.
انسان ها در زنده گی روز مره به علم ریاضی احتیاج دارند، این علم برای ساینس حیثیت کلید را دارد، زیرا که اکثر قوانین طبیعت به زبان ریاضی بیان می شود و در مسائل شرعی نیز به علم ریاضی ضرورت می باشد، در تقسیم میراث، تقسیم زمین و دریافت مساحت آن، تعیین حقوق شرکا، تعیین زکات و غیره موارد، از علم ریاضی استفاده صورت می گیرد.
برای اینکه فارغان مدارس علوم شرعی قابلیت های ضروری را آموخته، مسائل روزمرۀ زنده گی مربوط ریاضی را حل کرده بتوانند و مسائل؛ مانند: میراث، مشارکت، تقسیمات اموال و محتوای مضامین ساینسی را بفهمند، ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان مسائل ضروری ریاضی را در نصاب تعلیمی مدارس جابه جا نمود.
به گونه یی که ضرورت های اساسی شاگردان مدارس شرعی، تخصص آینده ایشان و ساعات تعیین شده در پلان تعلیمی برای مضمون ریاضی را در نظر گرفته و مسائل ضروری این علم را با درنظرداشت فن معاصر نصاب نویسی بر میتود آسان و مؤثر تألیف نمود، تا فارغان مدارس شرعی در پهلوی علوم دینی بعضی علوم ضروری دنیوی را نیز فرا گیرند، ظرفیت های شان بلند برود و نقش مؤثر و مثمر را در جامعه بازی نمایند.

و الله ولی التوفیق

فصل اول: اعداد نسبتی:

سیستم اعداد...۳

عملیه های جمع و تفریق اعداد نسبتی... ۷

عملیه های ضرب و تقسیم اعداد نسبتی.. ۱۱

موارد استعمال کسور در حل مسایل روزمرۀ زنده گی.................................۱۷

قوس ها و ساده ساختن افاده ها ۲۳

قوانین طاقت اعداد نسبتی... ۲۷

روش علمی عدد نویسی... ۳۳

نکات مهم فصل ۳۶

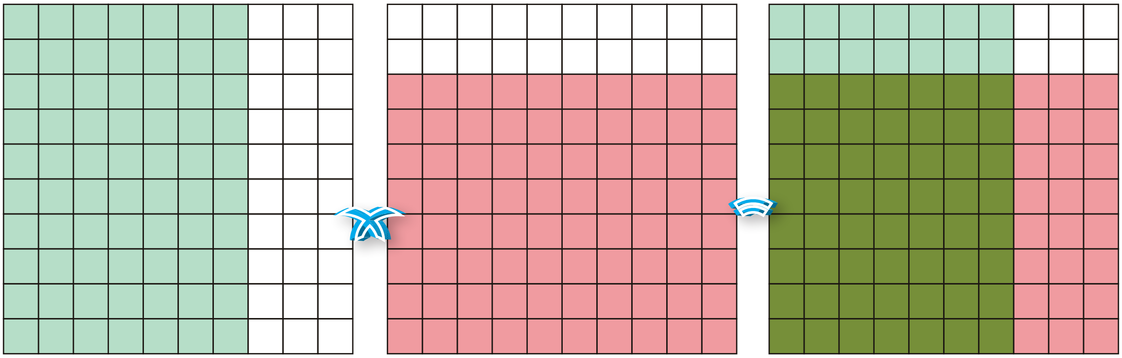
تمرین فصل... ۳۸

فصل دوم: پولینوم

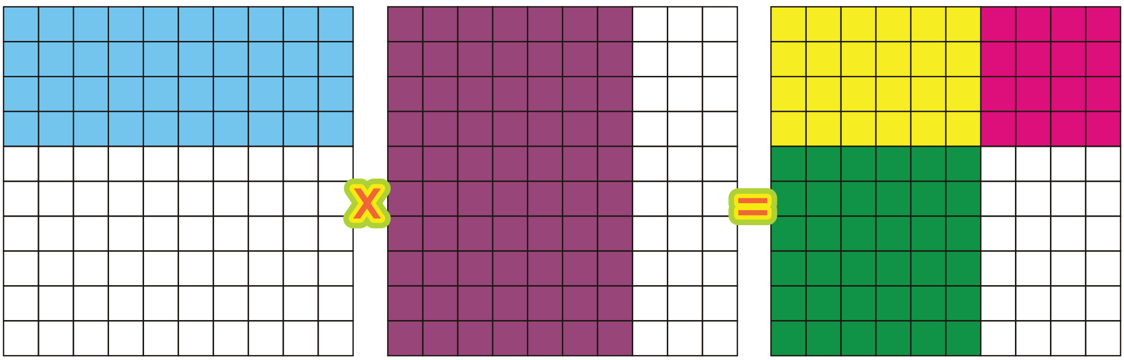
افاده های الجبری ۳۹
اقسام پولینوم و درجهٔ آن ۴۳
دریافت قیمت یک پولینوم ۴۹
عملیه های چهارگانهٔ پولینوم ها ۵۳
ضرب پولینوم ها ۵۷
تقسیم پولینوم ها ۶۱
مطابقت ها ($(a+b)^2$ و $(a-b)^2$) ۶۳
مطابقت $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ۶۹
تجزیه ۷۳
تجزیه افاده های الجبری که شکل a^2-b^2 را داشته باشند ۷۷
نکات مهم فصل ۸۰
تمرین فصل ۸۲

فصل اول

اعداد نسبتی
(Rational Numbers)



$0.7 \times 0.8 = 0.56$



$0.4 \times 0.7 = 0.28$

سیستم اعداد
System of numbers

آیا $0.\overline{3}$ عدد نسبتی است؟

در زمان های قدیم، زنده گی انسان ها بسیار ساده و بسیط بوده، چوپان ها، گوسفندان خویش را وقتی که به چراگاه می بردند و می آوردند با مجموعهٔ سنگچل ها مقایسه می کردند، که به این ترتیب حیوانات گم شده را معلوم می کردند.

در زمان های قدیم انسان ها به عوض اعداد ...1،2،3،4 سمبول های |،||،|||،||||... را استعمال می کردند.مصری ها تقریبا 5000 سال قبل از میلاد برای شمارش، ده انگشت دست را استعمال می کردند یعنی سیستمی به قاعدهٔ (10) داشت. علامهٔ ∩ را برای (10) و علامهٔ 9 را برای (100) به کار می بردند. به هر اندازه یی که ضرورت می بود یک سمبول طور تکراری نوشته می شد؛ طور مثال: عدد (13) را به شکل (|||∩) و عدد (324) را به شکل

||∩999
∩||

می نوشت، و این عدد را به شکل ذیل ترتیب می کردند:

1+1+1+1+10+10+100+100+100

مردم کشور های مختلف برای خود سیستم های مختلف اعداد را اختراع کرده بودند. که این سیستم ها برای جامعهٔ پیشرفته قابل قبول نبود؛ بنابرآن این سیستم های مختلف رد شدند و سیستم واحد عدد نویسی به وجود آمد.

1 - **ست اعداد طبیعی** که به نام ست اعداد شمارش (Count numbers) نیز یاد می شود و این طور نشان داده می شود: $IN = \{1,2,3,4,5...\}$

اما معادله $x+2=2$ در ست اعداد طبیعی حل ندارد $x=2-2=0$، چون در ست اعداد طبیعی صفر وجود ندارد، بنابرآن به ست دیگری ضرورت احساس شد.

2 - **ست اعداد مکمل(Whole numbers)** که عبارت از $w=\{0,1,2,3,4,5...\}$ می باشد؛ اما در ا ین ست مساوات $x+3=0$ حل ندارد، زیرا $x=-3$ میشود.

3 - **ست اعداد تام یا** $Z=\{...-2,-1,0,1,2...\}$ مساوات $2x+1=2$ در ست اعداد تام حل ندارد زیرا که $x=\frac{1}{2}$ می شود و $\frac{1}{2}$ در ست اعداد تام وجود ندارد.

4 - **ست اعداد نسبتی (ناطق):** می دانیم که عدد ناطق عددیست که به شکل $\frac{p}{q}$ که ($q\neq 0$ و p و q اعداد تام اند) نوشته شود. مانند $\frac{2}{3}, 4,3,7,\sqrt{16}$ وغیره اعداد نسبتی اند

زیرا $\sqrt{16}=4=\frac{4}{1}$

a - کسرهای اعشاری مختوم (Terminating decimals): کسور اعشاری که تعداد ارقام اعشاری آن معین باشد به نام کسور اعشاری مختوم یاد می شود که 202.04، 0.0000415، 100000.41237895، مثال های کسور اعشاری مختوم می باشند.

b - کسرهای اعشاری متوالی (Recurring Decimal Fractions): عبارت از کسر های اعشاری اند که یک یا چند رقم آن تکرار می شود؛ طور مثال:

$0.3\overline{6}, 4.\overline{123}, 0.\overline{23}, 2.\overline{3}$

این کسر های اعشاری نیز به شکل کسر عام نوشته شده می تواند پس هر کسر اعشاری متوالی نیز یک عدد ناطق می باشد.

مثال اول:

$$\frac{2}{9}=0.\overline{2}$$

$$\frac{4}{7}=0.\overline{571428}$$

$$\frac{9}{11}=0.\overline{81}$$

$$\frac{7}{12}=0.58\overline{3}$$

$$0.36=\frac{36}{100}=\frac{18}{50}=\frac{9}{25}$$

$$0.\overline{36}=\frac{36}{99}=\frac{12}{33}=\frac{4}{11}$$

$$0.3\overline{6}=\frac{33}{90}=\frac{11}{30}$$

$$0.\overline{123}=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}$$

$$0.25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

$$0.333...=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

فعالیت

اعداد زیر را به شکل کسر های اعشاری متوالی بنویسید:

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{11}$ $\frac{10}{13}$ $\frac{4}{15}$ $\frac{17}{18}$

$\frac{5}{22}$ $\frac{13}{24}$ $\frac{13}{27}$ $\frac{29}{33}$ $\frac{9}{11}$

5 – اعداد غیرنسبتی یا اعداد گنگ (Irrational numbers): اعدادی که به شکل کسر عام نوشته شده نتوانند و یا به عبارت دیگر که به شکل $\frac{p}{q}$ درآورده نشود (p و q اعداد تام و $q \neq 0$ می باشد) مثل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{5}{16}}$ و غیره.

کسرهای اعشاریی که ارقام اعشاری آن ها نه ختم می شود و نه تکرار می شود اعداد غیرنسبتی اند

مانند: 3.141592654,…,1.709975947…,7.3205080…, 0.01001000100001

که این عدد به نام $\pi = 3.14159...$ یاد می شود.

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{طول قطر دایره}}$$

6 – ست اعداد حقیقی: از اتحاد اعداد نسبتی (Q) و اعداد غیر نسبتی (Q') تشکیل می شود. $Q \cup Q' = IR$

7 – ست اعداد مختلط: معادلهٔ $x^2 + 1 = 0$ در ست اعداد حقیقی حل ندارد؛ اما در ست اعداد مختلط حل دارد. یا اعداد منفی در ست اعداد حقیقی که درجهٔ جذر آن جفت باشد، جذر ندارد. طور مثال: اعداد $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-64}$, $\sqrt{-36}$ و غیره که در ست اعداد مختلط دارای جذر دوم می باشد.

شکل عمومی یک عدد مختلط (a+bi) می باشد که a و b اعداد حقیقی و $i = \sqrt{-1}$ می باشد.

مثال دوم: در اعداد زیر اعداد نسبتی، غیر نسبتی و اعداد حقیقی را نشان دهید:

$\sqrt{-17}$ $\sqrt{\frac{1}{4}}$ $\frac{3}{0}$ $\sqrt{10}$ $\frac{\sqrt{9}}{3}$ -56.85 $\sqrt{3}$

حل

$\sqrt{3}$ عدد غیر نسبتی، عدد حقیقی می باشد.

-56.85 یک کسر اعشاری مختوم و در نتیجه عدد نسبتی و عدد حقیقی می باشد.

$\frac{\sqrt{9}}{3}$ عدد مکمل، عدد تام، عدد نسبتی، عدد حقیقی می باشد.

$\sqrt{10}$ عدد غیر نسبتی می باشد.

$\frac{3}{0}$ تعریف نه شده، پس عدد حقیقی نیز نمی باشد.

$\sqrt{\frac{1}{4}}$ عدد نسبتی است.

$\sqrt{-17}$ عدد حقیقی نیست.

فعالیت

بین اعداد حقیقی $2\frac{1}{3}$ و $2\frac{2}{3}$ چند عدد حقیقی وجود دارد؟

تمرین

1 – در اعداد زیر کدام عدد نسبتی، غیر نسبتی و یا عدد حقیقی نیست:

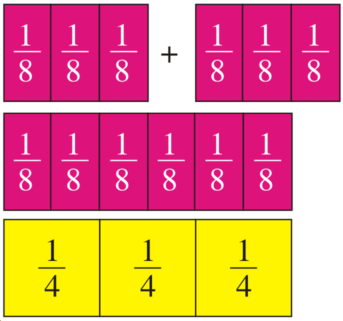
$-\sqrt{-2}$ $\quad \sqrt{72}$ $\quad \sqrt{\frac{4}{25}}$ $\quad \sqrt{4}$

$\frac{0}{0}$ $\quad \sqrt{\frac{16}{-25}}$ $\quad \sqrt{-4}$ $\quad -\sqrt{36}$

2 – اعداد نسبتی زیر را به شکل کسر اعشاری بنویسید:

$\frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{4}$ $\quad \frac{3}{8}$ $\quad \frac{7}{12}$ $\quad \frac{2}{9}$ $\quad \frac{4}{7}$ $\quad \frac{9}{11}$

عملیه های جمع و تفریق اعداد نسبتی



آیا عملیه $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ را در شکل تطبیق کرده می توانید؟

شما با عملیه های چهارگانهٔ اعداد نسبتی در صنف 7 آشنا شده اید غرض تکرار و وضاحت بطور مختصر بعضی از مثال ها را یادآوری می نمائیم.

مثال اول:

$$\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{3+4}{7}=\frac{7}{7}=1$$

$$\frac{8}{11}-\frac{(-2)}{11}=\frac{8-(-2)}{11}=\frac{8+2}{11}=\frac{10}{11}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=?$$

$$\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20}\quad , \qquad \frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{8}{20}$$

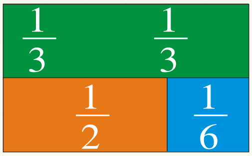
$$\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20}$$

فعالیت

اعداد نسبتی زیر را جمع و تفریق نمایید:

a) $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{6}-\frac{5}{9}$ c) $3\frac{1}{2}+7\frac{4}{5}$ d) $7\frac{1}{10}-2\frac{3}{4}$

مثال دوم: حاصل تفریق $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$ را در شکل مشاهده کنید.



$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

مثال سوم

$$\frac{6}{19}+\frac{(-25)}{19}=\frac{6}{19}-\frac{25}{19}=\frac{-19}{19}=-1$$

$$\frac{1}{5}+(-\frac{3}{35})+\frac{1}{60}=\frac{84-36+7}{420}=\frac{91-36}{420}=\frac{55}{420}=\frac{11}{84}$$

$$-\frac{3}{8}-\frac{5}{8}=\frac{-3}{8}+\frac{-5}{8}=\frac{-3+(-5)}{8}=\frac{-8}{8}=-1$$

مثال چهارم: اگر $t=2\frac{5}{8}$ باشد، قیمت $-\frac{1}{8}+t$ را معلوم کنید.

حل

$$-\frac{1}{8}+2\frac{5}{8}=\frac{-1}{8}+\frac{21}{8}=\frac{-1+21}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

مثال پنجم: مجموع دو عدد نسبتی $\frac{11}{21}$ می باشد، اگر یک عدد $\frac{-2}{7}$ باشد عدد دیگری را دریابید.

حل

$$x+(-\frac{2}{7})=\frac{11}{21} \Rightarrow x-\frac{2}{7}=\frac{11}{21} \Rightarrow x=\frac{11}{21}+\frac{2}{7}=\frac{17}{21}$$

مثال ششم:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$$

$$3\frac{2}{5}+(-3\frac{1}{2})=\frac{17}{5}+(-\frac{7}{2})=\frac{34-35}{10}=-\frac{1}{10}$$

مثال هفتم: اگر $n=-\frac{1}{3}$ باشد قیمت $n-\frac{11}{6}$ را دریابید.

حل

$$-\frac{1}{3}-\frac{11}{16}=\frac{-16-33}{48}=-\frac{49}{48}=-1\frac{1}{48}$$

$$2\frac{2}{5}+9\frac{1}{3}=\frac{12}{5}+\frac{28}{3}=\frac{36+140}{15}=\frac{176}{15}=11\frac{11}{15}.$$

فعالیت

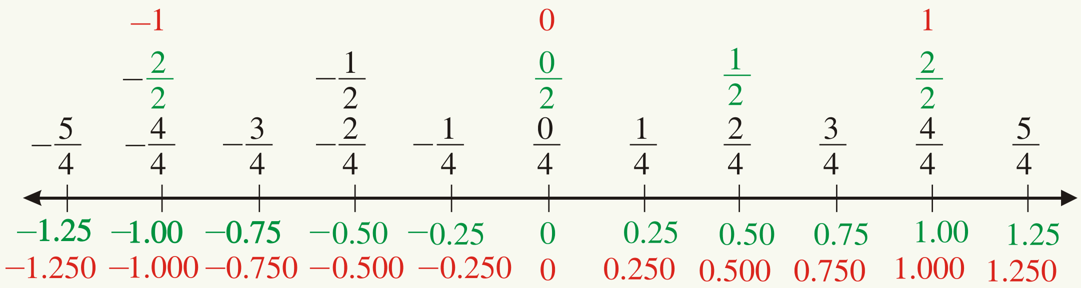
$$15\frac{1}{2}-11\frac{11}{15}=?$$

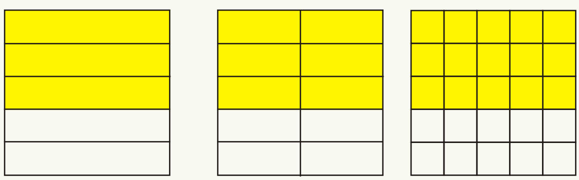
نوت: کسور معادل را در اشکال ذیل مشاهده کنید:

$-0.50=-0.0500$ $\quad$ $-0.75=-0.750$ $\quad$ $-1.25=-1.250$

$0.50=0.500$ $\quad$ $0.25=-0.250$ $\quad$ $-0.25=-0.250$

$-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ $\quad$ $1.25=1.250$ $\quad$ $0.75=0.750$





$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{15}{25}$$

تمرین

1 - جمع و تفریق کنید.

a) $\frac{8}{11}-\frac{3}{11}$

b) $-\frac{3}{4}+(-\frac{3}{4})$

c) $-0.9+2.5$

d) $-\frac{1}{12}+(-\frac{7}{12})$

e) $-1.7+3.6$

f) $-\frac{7}{10}+(-\frac{3}{10})$

g) $-4+1.3$

h) $-\frac{15}{16}+(-\frac{9}{16})$

i) $\frac{31}{45}-\frac{5}{9}$

j) $-\frac{13}{24}-(-\frac{11}{16})$

2 - از عدد نسبتی $\frac{-3}{11}$ کدام عدد تفریق شود که مساوی به $\frac{2}{17}$ شود؟

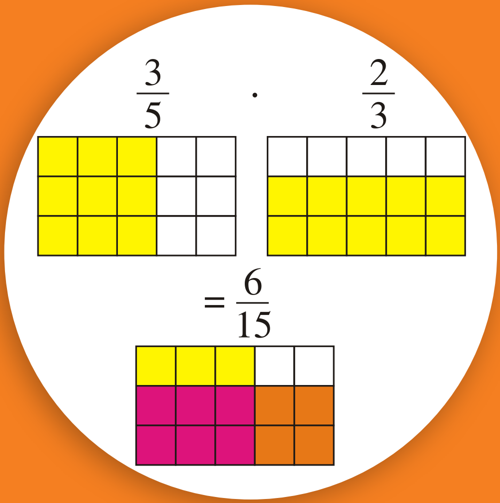
3 - ساده سازید:

$$-\frac{1}{3}+\frac{8}{7}-\frac{2}{21}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}$$

4 - حاصل جمع $\frac{2}{3}$ و $-\frac{5}{6}$ را از حاصل جمع $-\frac{2}{9}$ و $-\frac{7}{18}$ تفریق کنید.

عملیهٔ های ضرب و تقسیم اعداد نسبتی

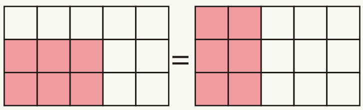
آیا حاصل ضرب دو عدد نسبتی $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{3}$ را در شکل تطبیق کرده میتوانید؟



$$6\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{6 \cdot 2}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$-4\left(2\frac{3}{5}\right) = -4\left(\frac{13}{5}\right) = -\frac{52}{5} = -10\frac{2}{5}$$

مثال اول: در شکل ذیل شکل سادهٔ حاصل ضرب $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}$ را مشاهده کنید.



$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

مثال دوم:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10}$$

$$\frac{5}{12}\left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{-60}{60} = -1$$

$$\left(6\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{20}\right) = \left(\frac{20}{3}\right)\left(\frac{7}{20}\right) = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$(-2.5)(-8) = 20$$

$$-0.07(4.6) = -0.322$$

مثال سوم : اگر $t = -\frac{2}{3}$ باشد قیمت $-5\frac{1}{2}t$ را معلوم کنید.

$$(-5\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})=(-\frac{11}{2})(-\frac{2}{3})=\frac{22}{6}=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$$

فعالیت

اگر $t=8$ باشد قیمت $-5\frac{1}{2}t$ را معلوم کنید.

مثال چهارم:

$(100)(0.1)=10$

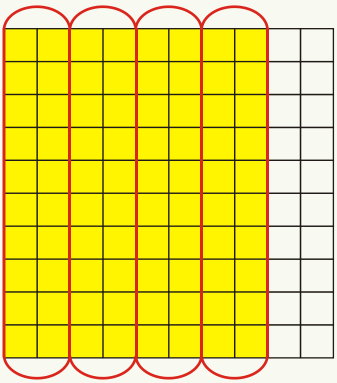
$(10)(0.1)=1$ $\quad$ $(1000)(0.001)=1$

$(100)(0.01)=1$ $\quad$ $(0.1)(0.1)(0.1)=0.001$

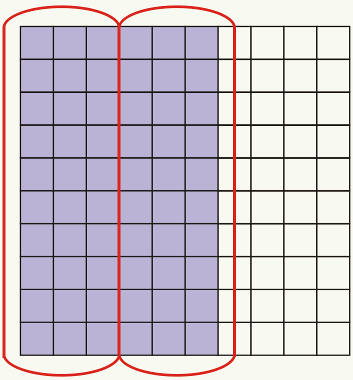
$(10000)(0.0001)=1$ $\quad$ $(0.3)(0.03)=0.009$

عملیهٔ تقسیم اعداد نسبتی: حاصل ضرب عدد نسبتی با معکوس ضربی آن مساوی به (1) می باشد.

حاصل ضرب	معکوس ضربی	عدد
$\frac{3}{4}(\frac{4}{3})=1$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$(-\frac{5}{12})(-\frac{12}{5})=1$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{12}{5}$
$6(\frac{1}{6})=1$	$\frac{1}{6}$	6



$0.8\div4=0.2$



$0.6\div0.3=2$

مثال پنجم:

$$\frac{7}{12}\div\frac{2}{3}=\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$$

$$3\frac{1}{4}\div 4=\frac{13}{4}\div\frac{4}{1}=\frac{13}{4}(\frac{1}{4})=\frac{13}{16}$$

فعالیت

$$2.92\div 0.4=?$$

مثال ششم:

$$100\div 0.1=1000=10^3$$

$$1000\div 0.01=100000=10^5$$

$$10000\div 0.001=10000000=10^7$$

$$0.1\div 10=\frac{0.1}{10}=\frac{1}{100}=0.01=10^{-2}$$

$$0.01\div 10=\frac{0.01}{10}=\frac{1}{1000}=0.001=10^{-3}$$

مثال هفتم: اگر $n=0.24$ باشد قیمت $\frac{7.2}{n}$ را معلوم کنید.

$$\frac{7.2}{0.24}=\frac{720}{24}=30$$

اگر $m=7\frac{1}{2}$ باشد قیمت $m\div\frac{3}{8}$ را معلوم کنید.

$$7\frac{1}{2}\div\frac{3}{8}=\frac{15}{2}\cdot\frac{8}{3}=\frac{120}{6}=20$$

خواص اعداد نسبتی

خواص عملیهٔ جمع اعداد نسبتی:

1 - **خاصیت بسته گی:** $\frac{5}{2}$ و $\frac{3}{7}$ دو عدد نسبتی می باشد:

$$\frac{5}{2}+\frac{3}{7}=\frac{35+6}{14}=\frac{41}{14}$$

که $\frac{41}{14}$ نیز یک عدد نسبتی می باشد.

2 - خاصیت تبدیلی:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$$
$$\frac{22}{15}=\frac{22}{15}$$

3 - خاصیت اتحادی:

$$(\frac{2}{3}+\frac{3}{4})+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+(\frac{3}{4}+\frac{1}{2})$$
$$\frac{23}{12}=\frac{23}{12}$$

4 - صفر در عملیهٔ جمع عنصر عینیت می باشد.

$$0+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+0=\frac{3}{4}$$

خواص عملیهٔ ضرب اعداد نسبتی:

1 - اعداد نسبتی تحت عملیهٔ ضرب نیز بسته می باشد.

طور مثال: $\frac{3}{4}$ و $\frac{5}{7}$ دو عدد نسبتی است و $\frac{15}{28}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}$ که $\frac{15}{28}$ نیز یک عدد نسبتی می باشد.

2 - خاصیت تبدیلی عملیهٔ ضرب اعداد نسبتی:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$
$$\frac{8}{15}=\frac{8}{15}$$

3 - خاصیت اتحادی عملیهٔ ضرب اعداد نسبتی:

$$(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4})\frac{5}{6}=\frac{2}{3}(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6})$$
$$\frac{5}{12}=\frac{5}{12}$$

4 - خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع اعداد نسبتی:

$$\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\frac{3}{4})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$$
$$\frac{1}{2}(\frac{17}{12})=\frac{2}{6}+\frac{3}{8}$$
$$\frac{17}{24}=\frac{17}{24}$$

5 - عدد (1) در عملیه ضرب عنصر عینیت می باشد:

$$\frac{3}{4}\cdot 1=1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

تمرین

1 - ضرب کنید:

a) $-\frac{1}{3}(-\frac{4}{7})$ b) $\frac{3}{8}(-\frac{7}{10})$ c) $6\frac{2}{5}(\frac{5}{9})$

d) $\frac{5}{12}(-\frac{11}{6})$ e) $-3.1(-4)$ f) $0.04(3.6)$

g) $-7.3(-5)$ h) $-0.15(2.8)$ i) $-0.08(5.2)$

j) $0.5(7.3)$ k) $-4.7(-3)$ l) $-4(1\frac{5}{8})$

m) $-7(3\frac{1}{5})$ n) $-\frac{1}{2}(-\frac{11}{2})$ o) $-2.9(-3)$

p) $-0.02(5.9)$

2 - قیمت $2\frac{3}{4}x$ را معلوم کنید، که اگر $x=2\frac{1}{3}, x=-4, x=-\frac{3}{8}, x=-\frac{7}{9}$ و $x=6$ باشد.

3 - تقسیم کند:

a) $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$ b) $2\frac{1}{4} \div 3\frac{2}{5}$ c) $3.72 \div 0.3$

d) $\frac{-5}{9} \div 6$ e) $3.46 \div 0.9$ f) $14.08 \div 0.8$

g) $11.128 \div 0.52$ h) $24 \div 0.75$ i) $1 \div 0.1$

j) $10 \div 0.01$ k) $7.86 \div 0.006$ l) $3.6864 \div 0.64$

m) $0.1 \div 100$ n) $0.1 \div 0.01$ o) $144 \div 12$

p) $1.44 \div 1.2$ q) $144 \div 1.2$ r) $0.144 \div 1.2$

s) $14.4 \div 0.12$ t) $2.56 \div 1.6$ u) $0.256 \div 0.16$

v) $0.00256 \div 1.6$ w) $256000 \div 0.16$ x) $0.00000256 \div 16$

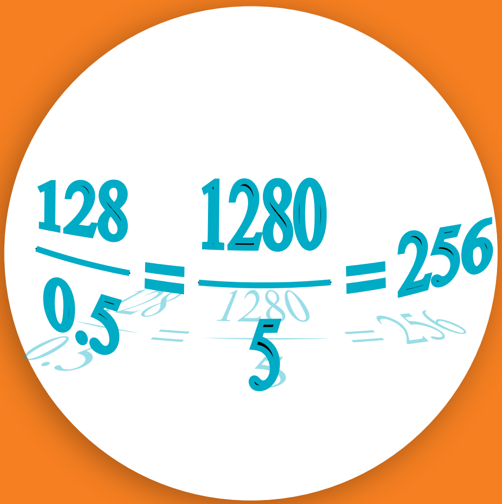
y) $256 \div 0.0016$

4 - اگر حاصل ضرب دو عدد نسبتی $-\frac{12}{39}$ باشد، اگر یکی از آن عدد $\frac{4}{3}$ باشد، عدد دیگری را معلوم کنید.

5 - عدد نسبتی 0.1 به کدام عدد تقسیم گردد، تا حاصل تقسیم عدد 100 شود؟

6 - عدد نسبتی 0.01 بر کدام عدد تقسیم گردد، تا حاصل تقسیم 10000 شود؟

موارد استعمال کسور در حل مسائل روزمرۀ زنده گی



0.5 حصه کدام عدد مساوی به عدد 128 می شود؟

مثال دوم: در یک امتحان $\frac{2}{3}$ حصه 111 شاگرد کامیاب گردیده اند تعداد شاگردان کامیاب و ناکام را معلوم کنید.

حل:

شاگردان کامیاب: $111\times\frac{2}{3}=\frac{222}{3}=74$

شاگردان ناکام: $111-74=37$

مثال دوم: $\frac{3}{5}$ حصۀ عدد 3335 چند می شود؟

حل

$$3335\times\frac{3}{5}=2001$$

فعالیت

$\frac{3}{5}$ حصۀ کدام عدد 2001 می شود؟

مثال سوم: $\frac{2}{3}$ حصۀ کدام عدد 74 می شود؟

حل:

$$74\div\frac{2}{3}=74\times\frac{3}{2}=111$$

مثال چهارم: یک چوب 12m طول دارد اگر $\frac{3}{4}$ حصۀ آن در یک حوض غرق شود عمق حوض را در این نقطه معلوم کنید.

حل:

$$12 \times \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9m$$

مثال پنجم: $\frac{3}{5}$ حصهٔ سرمایهٔ احمد 81000 می باشد، مقدار پول احمد را معلوم کنید.

حل:

$$81000 \div \frac{3}{5} = 81000 \times \frac{5}{3} = \frac{405000}{3} = 135000$$

فعالیت

0.01 حصه کدام عدد 1000 می شود.

مثال ششم: در یک مکتب $\frac{1}{10}$ حصهٔ شاگردان در مضمون ریاضی $\frac{1}{8}$ حصهٔ آنها در مضمون بیولوژی و $\frac{1}{5}$ حصهٔ آنها در مضمون فزیک ناکام شده اند.

اگر تعداد شاگردانیکه کامیاب گردیده اند 230 نفر باشند تعداد مجموعی شاگردان این مکتب را معلوم کنید.

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 10 & 8 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 4 & 5 \\ \hline & 1 & 4 & 1 \end{array}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{4+5+8}{40} = \frac{17}{40}$$

$$1 - \frac{17}{40} = \frac{40-17}{40} = \frac{23}{40}$$

$\frac{23}{40}$ حصهٔ شاگردان مکتب کامیاب گردیده اند که 230 نفر می باشد پس تعدد داخلهٔ مکتب مساوی است به:

$$\frac{23}{40} = 230$$

$$1 = x$$

$$x = \frac{230}{\frac{23}{40}} = \frac{230 \cdot 40}{23} = 400$$

مثال هفتم: احمد 36 لیتر شیر داشت، اگر $\frac{1}{12}$ حصهٔ این شیر را به محمود، $\frac{1}{9}$ حصهٔ

آن را به قاسم و $\frac{1}{6}$ حصهٔ آن را به زلمی داده باشد و شیر باقیمانده را از قرار فی لیتر 18 افغانی بالای یک دوکاندار فروخته باشد مقدار پولی که دوکاندار تادیه کرده معلوم کنید.

حل:

حصهٔ احمد به لیتر $36\times\frac{1}{12}=3$

حصهٔ محمود به لیتر $36\times\frac{1}{9}=4$

حصهٔ زلمی به لیتر $36\times\frac{1}{6}=6$

$3+4+6=13$

$36-13=23$

$23\times18=414$

مقدار پولی که دوکاندار تادیه کرده است عبارت از 414 افغانی میباشد.

مثال هشتم: اگر احمد $\frac{3}{8}$ حصهٔ یک زمین و محمود $\frac{5}{12}$ حصهٔ این زمین را خریده باشند و زمین متباقی را قاسم به مبلغ 31200 افغانی خریده است. قیمت های زمین احمد و محمود را معلوم کنید.

حل:

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}=\frac{9+10}{24}=\frac{19}{24}$$

$$1-\frac{19}{24}=\frac{24-19}{24}=\frac{5}{24}$$

یعنی $\frac{5}{24}$ حصهٔ این زمین را قاسم خریده است که قیمت آن 31200 می باشد. درنتیجه قیمت مجموعی زمین مساوی است به:

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{24} & 31200 \\ 1 & x \end{array} \Rightarrow x=\frac{31200\cdot1}{\frac{5}{24}}=\frac{31200\cdot24}{5}=149760 \text{ افغانی}$$

قیمت زمین احمد افغانی $149760\times\frac{3}{8}=56160$

قیمت زمین محمود افغانی $149760 \times \frac{5}{12} = 62400$

قیمت زمین قاسم افغانی $149760 \times \frac{5}{24} = 31200$

مثال نهم: در یک طیاره 350 نفر مسافر می باشند اگر 0.2 حصهٔ آن ها جوانان و 0.25 حصهٔ مسافرین متباقی اطفال و 0.6 حصهٔ مسافر این متباقی ریش سفیدان و مسافر باقیمانده زن ها باشند تعداد زن ها را معلوم کنید.

حل:

جوانان: $350 \times 0.2 = 70$

$350 - 70 = 280$

اطفال: $280 \times 0.25 = 70$

$280 - 70 = 210$

ریش سفیدان: $210 \times 0.6 = 126$

تعداد زنها: $210 - 126 = 84$

مثال دهم: نفوس یک قریه 32000 نفر است اگر 0.4 حصهٔ آنها باسواد باشد تعداد باسواد و بی سواد را معلوم کنید.

باسواد: $32000 \times 0.4 = 12800$

بی سواد: $32000 - 12800 = 19200$

مثال یازدهم: 0.2 حصهٔ کدام عدد 111 می شود.

$$\frac{111}{0.2} = \frac{1110}{2} = 555$$

فعالیت

$\frac{3}{4}$ حصهٔ کدام عدد 12 می شود و 0.1 حصهٔ کدام عدد 857 می شود.

تبدیل کسر اعشار به فیصد و فیصد به کسر اعشار:

$0.24 = 24\%$

$0.005 = 0.5\%$

$0.36 \times 100 = 36\%$

$0.1 \times 100 = 10\%$

$1.2 \times 100 = 120\%$

$2.01 \times 100 = 201\%$

مثال اول: $0.1\%, 80\%, 20\%, 2\%$ و 0.02% را به کسر اعشار تبدیل کنید.

$$2\% = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$0.1\% = \frac{0.1}{100} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

$$0.02\% = \frac{0.02}{100} = \frac{2}{10000} = 0.0002$$

مثال دوم: اگر احمد 0.3 حصهٔ معاش خود را در کرایهٔ خانه داده باشد. آیا چند فیصد معاش خور را در کرایه خانه داده است؟

$$0.3 \times 100 = 30\%$$

در نتیجه احمد 30% معاش خود را در کرایه خانه داده است.

مثال سوم: اگر یک دهقان $\frac{3}{4}$ حصهٔ زمین خود را گندم و متباقی زمین را جواری کشت کرده باشد. آیا چند فیصد زمین را گندم و چند فیصد را جواری کشت کرده است؟

حل:

گندم: $\frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 75\%$

جواری: $100 - 75 = 25\%$

تمرین

1 – احمد 500 افغانی دارد، اگر روز اول $\frac{1}{5}$ حصه، روز دوم $\frac{1}{2}$ حصهٔ پول متباقی را روز سوم $\frac{3}{5}$ حصهٔ پول متباقی را مصرف کرده باشد، حالا احمد چند افغانی دارد؟

2 – در یک شهر 250000 نفر زنده گی می کند. اگر 0.15 حصهٔ آن ها باسواد باشد تعداد بی سواد را معلوم کنید.

3 – 0.00001 حصهٔ عدد 8.7×10^6 چند می شود؟

4 – احمد 72 جلد کتابچه داشت اگر $\frac{5}{9}$ حصهٔ آن را به محمود و محمود $\frac{3}{5}$ حصهٔ کتابچه های خود را به زلمی داده باشد، تعداد کتابچه های زلمی را دریابید.

5 – فاصله بین دو شهر A و B, 36km است اگر احمد $\frac{7}{9}$ حصهٔ این فاصله را توسط بایسکل و $\frac{3}{4}$ حصهٔ فاصلهٔ باقیمانده را پیاده طی کرده باشد، حالاً فاصله بین احمد و شهر B چقدر است؟

قوس ها و ساده ساختن افاده ها

میتوانید بگویید که حاصل

$$5\frac{6}{7}-\left[2\frac{1}{3}\left\{1\frac{7}{8}\div(5\frac{1}{2}-4\frac{3}{4})\right\}\right]$$

چند می شود؟

$$5\frac{6}{7}-\left[2\frac{1}{3}\left\{1\frac{7}{8}\div(5\frac{1}{2}-4\frac{3}{4})\right\}\right]=\frac{1}{42}$$

در ریاضیات( ) به حیث قوس کوچک، { } به حیث قوس متوسط و [ ] به حیث قوس بزرگ استعمال می شود؛ که نخست از همه( ) سپس { } و در اخیر [ ] رفع می شود.

مثال اول: ساده کنید.

$$5\frac{6}{7}-\left[2\frac{1}{3}\left\{1\frac{7}{8}\div(5\frac{1}{2}-4\frac{3}{4})\right\}\right]$$

$$=\frac{41}{7}-\left[\frac{7}{3}\left\{\frac{15}{8}\div(\frac{11}{2}-\frac{19}{4})\right\}\right]=\frac{41}{7}-\left[\frac{7}{3}\left\{\frac{15}{8}\div\frac{22-19}{4}\right\}\right]$$

$$=\frac{41}{7}-\left[\frac{7}{3}\left\{\frac{15}{8}\div\frac{3}{4}\right\}\right]=\frac{41}{7}-\left[\frac{7}{3}\left\{\frac{15}{8}\cdot\frac{4}{3}\right\}\right]=\frac{41}{7}-\left[\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{2}\right]$$

$$=\frac{41}{7}-\frac{35}{6}=\frac{246-245}{42}=\frac{1}{42}$$

مثال دوم: ساده کنید.

$$1\frac{5}{6}\div\left[3\frac{1}{9}\div\left\{1\frac{1}{8}\cdot1\frac{1}{8}+(3\frac{2}{3}-2\frac{7}{12})\right\}\right]$$

$$=\frac{11}{6}\div\left[\frac{28}{9}\div\left\{\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}+(\frac{11}{3}-\frac{31}{12})\right\}\right]$$

$$=\frac{11}{6}\div\left[\frac{28}{9}\div\left\{\frac{5}{4}+\frac{13}{12}\right\}\right]=\frac{11}{6}\div\left[\frac{28}{9}\div\left\{\frac{15+13}{12}\right\}\right]$$

$$= \frac{11}{6} \div \left[\frac{28}{9} \div \frac{28}{12}\right] = \frac{11}{6} \div \left[\frac{28}{9} \cdot \frac{12}{28}\right]$$
$$= \frac{11}{6} \div \frac{4}{3} = \frac{11}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{24} = \frac{11}{8} = 1\frac{3}{8}$$

مثال سوم: ساده کنید.

$$0.4[1.45 - \{0.37 \div (1.35 + 3.25 - 2.75)\}]$$
$$= 0.4[1.45 - \{0.37 \div (4.60 - 2.75)\}]$$
$$= 0.4[1.45 - \{0.37 \div 1.85\}]$$
$$= 0.4[1.45 - 0.2] = (0.4)(1.25) = 0.5$$

فعالیت

ساده کنید.

$$5.321 - [3.07 - \{5.269 - (4.02 + 2.39 - 3.75)\}]$$

جواب:

(4.859)

مثال چهارم:

$$5a - \{6a - (7a - 4a)\}$$
$$= 5a - \{6a - (3a)\} = 5a - 3a = 2a$$

اگر قوس ها وجود نداشته باشند و در افاده دو یا اضافه تر از دو عملیهٔ اساسی موجود باشد عملیه ها به ترتیب تقسیم، ضرب، جمع و تفریق از چپ به راست انجام می شوند این ترتیب به نام(DMAS) نامیده می شود؛ طور مثال:

$$18 + 6 - 5 \times 2 + 11 - 3 = 18 + 6 - 10 + 11 - 3$$
$$= 18 + 6 + 11 - 10 - 3 = 35 - 13 = 22$$

$$48 \div 16 \times 3 = 3 \times 3 = 9$$

و اگر این افاده دارای قوس باشد: $48 \div (16 \times 3) = 48 \div 48 = 1$ می شود.

به صورت عموم اگر در افاده قوس ها نیز وجود داشته باشد به ترتیب(BODMAS) ساده می شود که B از Brackets(قوس) و O از Operation(عملیه)، D از Division

(تقسیم)، M از Multiplication(ضرب)، A از Addition(جمع) و S از Subtraction (تفریق) اخذ شده است.

مثالها: ساده کنید:

a) $144 \div 8 \times 6 = 18 \times 6 = 108$

b) $25 - 42 \div 7 \times 2 + 45 \div 3 \times 5 - 5 \times 9 \div 3 \times 2$

$25 - 6 \times 2 + 15 \times 5 - 5 \times 3 \times 2 = 25 - 12 + 75 - 30$

$(25 + 75) - (12 + 30) = 100 - 42 = 58$

c) $12 \div 3\left[-4 + 8\left\{-3 + 2(-7 + 10) + 3(8 - 2)\right\} - 1\right]$

$12 \div 3\left[-4 + 8\left\{-3 + 2 \times 3 + 3 \times 6\right\} - 1\right]$

$12 \div 3[-4 + 8\{-3 + 6 + 18\} - 1]$

$12 \div 3[-4 + 8\{24 - 3\} - 1]$

$12 \div 3[-4 + 8 \cdot 21 - 1]$

$12 \div 3[168 - 5]$

$12 \div 3 \cdot 163$

$4 \cdot 163 = 652$

تمرین

ساده کنید:

a) $1.18 \div [3.45 - \{1.21 \div (5.69 - 3.27\}] = ?$

b) $0.42 \div [8.35 - \{1.5(1.9 + 3.4)\}] = ?$

c) $5.321 - [3.071 - \{5.269 - (4.02 + 2.39 - 3.75)\}]$

d) $4\frac{5}{6} - (3\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}) - (5\frac{4}{9} - 4\frac{2}{3}) = ?$

e) $4\frac{1}{2} - \left\{1\frac{1}{4} + \frac{7}{8} - (3\frac{9}{16} - 1\frac{3}{4}\right\} = ?$

f) $25 \div 5 \times 3 + 4$

g) $319 + 40 \div 8$

h) $4 - [-5 + \{-4 + (-5 + 4) - 5\} + 4] - 5$

$$(-\frac{5}{7})^5=\frac{-3125}{16807}$$

قوانین طاقت اعداد نسبتی(در صورتی که توان ها اعداد مثبت باشند)

$(-\frac{3}{4})^4$ چند می شود؟

قانون اول: اگر a عدد نسبتی و n,m اعداد مثبت تام باشند: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

مثال اول:

$$(\frac{3}{4})^2(\frac{3}{4})^5=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=(\frac{3}{4})^{2+5}=(\frac{3}{4})^7$$

$$(-\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2})^3(-\frac{1}{2})^5=(-\frac{1}{2})^{2+3+5}=(-\frac{1}{2})^{10}$$

قانون دوم: اگر a عدد نسبتی خلاف صفر باشد و n,m اعداد تام مثبت و m>n باشد:

$$a^m \div a^n=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

مثال دوم:

$$4^3 \div 4^2=\frac{4^3}{4^2}=\frac{4\cdot 4\cdot 4}{4\cdot 4}=4^{3-2}=4$$

$$(-3)^4 \div (-3)^2=\frac{(-3)^4}{(-3)^2}=(-3)^{4-2}=(-3)^2=9$$

$$(-\frac{2}{9})^8 \div (-\frac{2}{9})^5=(-\frac{2}{9})^{8-5}=(-\frac{2}{9})^3=(-\frac{2}{9})(-\frac{2}{9})(-\frac{2}{9})=-\frac{8}{729}$$

فعالیت

$$(\frac{3}{5})^3(\frac{3}{5})^2=?$$

قانون سوم: اگر a عدد نسبتی خلاف صفر و n,m اعداد تام مثبت و n>m باشد:

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{a^m}{a^n}$$

مثال سوم:

$$3^2 \div 3^5 = \frac{3^2}{3^5} = \frac{3\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3} = \frac{1}{3\cdot 3\cdot 3} = \frac{1}{3^{5-2}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$\frac{(-\frac{5}{9})^2}{(-\frac{5}{9})^5} = \frac{1}{(-\frac{5}{9})^{5-2}} = \frac{1}{(-\frac{5}{9})^3} = \frac{1}{-\frac{125}{729}} = -\frac{729}{125}$$

قانون چهارم: اگر a و b اعداد نسبتی و m عدد تام مثبت باشد:

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

مثال چهارم:

$$(\frac{1}{3})^4(\frac{5}{20})^4 = (\frac{5}{60})^4 = (\frac{1}{12})^4 = \frac{1}{(12)^4}$$

قانون پنجم: اگر a یک عدد نسبتی و n,m اعداد تام مثبت باشند.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

مثال5:

$$(2^2)^3 = 4^3 = 64$$

فعالیت

$\left[(-\frac{1}{3})^3\right]^2$ را ساده کنید.

قوانین طاقت وقتی که توان ها اعداد تام منفی و یا صفر باشند:

مشاهده شد که معکوس ضربی عدد نسبتی $\frac{p}{q}$ عبارت از $\frac{q}{p}$ میباشد و یا معکوس ضربی عدد $\frac{p}{q}$ به شکل $(\frac{p}{q})^{-1}$ نشان داده می شود؛ پس:

$$(\frac{p}{q})^{-1}=\frac{q}{p}$$

$$4^{-1}=(\frac{4}{1})^{-1}=\frac{1}{4} \qquad (-3)^{-1}=(\frac{-3}{1})^{-1}=-\frac{1}{3}$$

به صورت عموم اگر x یک عدد نسبتی خلاف صفر باشد $x^{-1}=\frac{1}{x}$ است 4^{-2} معکوس ضربی 4^{2} و 7^{-3} معکوس ضربی 7^{3} می باشد بالآخره x^{-n} معکوس ضربی x^{n} می باشد.

$$x^{-n}=\frac{1}{x^{n}}$$

قانون اول: اگر x یک عدد نسبتی خلاف صفر و n یک عدد تام مثبت باشد؛ پس x^{-n} معکوس ضربی x^{n} می باشد $(x^{-n}=\frac{1}{x^{n}})$

مثال اول: معکوس های ضربی اعداد نسبتی $(\frac{11}{13})^{-4}, (-\frac{31}{41})^{-5}$ را دریابید.

معکوس ضربی $(\frac{11}{13})^{-4}$ عبارت از $(\frac{11}{13})^{4}$ می باشد.

و معکوس ضربی $(\frac{-31}{41})^{-5}$ عبارت از $(\frac{-31}{41})^{5}$ می باشد.

قانون دوم: اگر a یک عدد نسبتی خلاف صفر و n,m اعداد تام مثبت و یا منفی باشد.

$$a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$$

مثال دوم:

$$(4^{9})(4^{-7})=(4^{9})(\frac{1}{4^{7}})=\frac{4^{9}}{4^{7}}=4^{9-7}=4^{2}=16$$

$$(-\frac{2}{5})^{6}(-\frac{2}{5})^{-3}=(-\frac{2}{5})^{6}(\frac{1}{(-\frac{2}{5})^{3}})=\frac{(-\frac{2}{5})^{6}}{(-\frac{2}{5})^{3}}=(-\frac{2}{5})^{6-3}=(-\frac{2}{5})^{3}=-\frac{8}{125}$$

فعالیت

$$(\frac{2}{5})^{-3}(\frac{2}{5})^{8}(\frac{2}{5})^{-5}=?$$

مثال سوم:

$$(-\frac{7}{9})^5 \div (-\frac{7}{9})^3 = (-\frac{7}{9})^{5-3} = (-\frac{7}{9})^2 = \frac{49}{81}$$

مثال چهارم: نشان دهید که $\left\{(-\frac{5}{3})^{15}(-\frac{5}{3})^{-8}\right\} \div (-\frac{5}{3})^6 = -\frac{5}{3}$ می باشد.

حل:

$$\left\{(-\frac{5}{3})^{15}(-\frac{5}{3})^{-8}\right\} \div (-\frac{5}{3})^6 = (-\frac{5}{3})^{15-8} \div (-\frac{5}{3})^6 = (-\frac{5}{3})^7 \div (-\frac{5}{3})^6$$

$$= (-\frac{5}{3})^{7-6} = -\frac{5}{3}$$

قانون سوم: اگر a یک عدد نسبتی خلاف صفر و n,m اعداد تام مثبت یا منفی باشند:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{یا} \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \div a^n = a^m(\frac{1}{a^n}) = (a^m)(a^{-n}) = a^{m-n}$$

مثال پنجم:

$$2^{-3} \div 2^{-5} = 2^{-3+5} = 2^2 = 4$$

$$5^2 \div 5^{-1} = 5^{2+1} = 5^3 = 125$$

$$(-\frac{1}{3})^{-2} \div (-\frac{1}{3})^2 = (-\frac{1}{3})^{-2-2} = (-\frac{1}{3})^{-4} = \frac{1}{(-\frac{1}{3})^4} = \frac{1}{\frac{1}{81}} = 81$$

فعالیت

$$(-\frac{1}{4})^{-3} \div (-\frac{1}{4})^3 = ?$$

قانون چهارم: اگر a یک عدد نسبتی و n,m اعداد تام مثبت یا منفی باشند، پس:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

مثال6:

$$\left[(-\frac{3}{4})^{-2}\right]^{3}=(-\frac{4}{3})^{6}$$

$$\left[(\frac{5}{7})^{3}\right]^{-4}=(\frac{5^3}{7^3})^{-4}=(\frac{7^3}{5^3})^{4}=\frac{7^{12}}{5^{12}}=(\frac{7}{5})^{12}$$

$$\left[(\frac{3}{7})^{-2}\right]^{-3}=(\frac{3}{7})^{6}$$

فعالیت

$$\left[(-\frac{4}{5})^{-3}\right]^{-5}=?$$

قانون پنجم: $a^0=1$ می باشد (اگر a یک عدد نسبتی خلاف صفر باشد) پس:

$$(a^n)(a^{-n})=a^{n-n}=a^0$$

درحالی که a یک عدد نسبتی مثبت یا منفی باشد، همچنین:

$$(a^n)(a^{-n})=(a^n)(\frac{1}{a^n})=1 \quad \Rightarrow \quad a^0=1$$

همچنین: $(ab)^m=(a^m)(b^m)$

قانون ششم: اگر a و b اعداد نسبتی خلاف صفر و m عدد تام باشد.

وقتی که m یک عدد تام مثبت باشد؛ پس $m=-n$ که یک عدد تام مثبت میباشد.

$$(ab)^m=(ab)^{-n}=\frac{1}{(ab)^n}=(\frac{1}{a^n})(\frac{1}{b^n})=(a^{-n})(b)^{-n}=(a^m)(b)^m$$

اگر $m=0$ باشد

$$(ab)^0=1 \quad , \quad a^0=1 \quad , \quad b^0=1 \quad \Rightarrow \quad m=0$$

مثال هفتم:

$$(-2x)^{-2}=\frac{1}{(-2x)^2}=\frac{1}{(-2)^2x^2}=\frac{1}{4x^2} \quad \text{توان جفت}$$

$$(-2x)^{-3}=\frac{1}{(-2x)^3}=\frac{1}{(-2)^3x^3}=\frac{1}{-8x^3}=-\frac{1}{8x^3} \quad \text{توان طاق}$$

تمرین

1 - ساده کنید.

a) $(\frac{2}{5})^2(-\frac{3}{2})^3$

b) $(-\frac{2}{3})^4(-\frac{3}{4})^3$

c) $(\frac{1}{9})^2 \div (-\frac{1}{3})^2$

d) $(-\frac{1}{2})^4(-\frac{1}{2})^3$

e) $(-\frac{2}{3})^2(-\frac{2}{3})^3$

f) $\left[(\frac{2}{3})^4\right]^2$

g) $\left[(-\frac{5}{7})^3\right]^5$

h) $(-\frac{5}{7})^4(-\frac{5}{7})^{-3}(\frac{7}{5})^2$

i) $(-\frac{2}{3})^3(\frac{3}{2})^5 \div (\frac{3}{2})^2$

j) $(\frac{5}{3})^{-1} + 10^{-1} + (\frac{15}{7})^{-1}$

k) $\left[8^{-1} - (\frac{2}{3})^{-1}\right]^{-1}$

l) $-(-\frac{1}{3})^{-7}(3^5)$

m) $(4^2)^3(\frac{1}{2})^2 \div 8^{-3}$

n) $-(-\frac{1}{2})^{-3}(2^{-7})$

2 - $2^{-5} = ?$

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{32}$ c) $-\frac{1}{32}$ d) $\frac{-1}{10}$

3 - $8.1 \times 10^{-5} = ?$

a) 8100000 b) 0.000081 c) 810000 d) 0.0000081

روش علمی عدد نویسی
Scientfiic Notation

کتلهٔ زمین 5980000000000000000000 تن متریک می باشد ایا این عدد را به روش علمی عدد نویسی میتوان نوشت؟

$$1.2 = 0.12\times10 = 0.012\times10^{2}$$
$$= 0.0012\times10^{3} = 0.00012\times10^{4} = \ ...$$
$$12\times10^{-1} = 120\times10^{-2} = 1200\times10^{-3}$$

یک عدد را با استفاده از روش عدد نویسی به شکل $K\times10^{n}$ طوری که $1\leq K<10$ و n یک عدد تام می باشد.

مثال اول:

اعداد		روش علمی عدد نویسی
875000	=	8.75×10^{5}
87500	=	8.75×10^{4}
8750	=	8.75×10^{3}
875	=	8.75×10^{2}
87.5	=	8.75×10^{1}
8.75	=	8.75×10^{0}
0.875	=	8.75×10^{-1}
0.0875	=	8.75×10^{-2}
0.00875	=	8.75×10^{-3}
0.000875	=	8.75×10^{-4}

نتیجه می شود که:

1 - اگر عدد داده شده بزرگتر یا مساوی به 10 باشد توان (10) عدد تام مثبت می باشد.

مانند: $56.8 = 5.68\times10^1$

2 - اگر عدد داده شده بزرگتر یا مساوی به یک و کوچکتر از (10) باشد توان (10) صفر است. مانند: $5.68 = 5.68\times10^0$

3 - اگر عدد داده شده کوچکتر از (1) باشد توان (10) عدد تام منفی می باشد.

مانند: $0.568 = 5.68\times10^{-1}$

مثال دوم: اعداد ذیل را به روش علمی عدد نویسی بنویسید.

$$5370000 = 5.370000\times10^6 = 5.37\times10^6$$

$$89573850123 = 8.9573850123\times10^{10}$$

$$0.98392051 = 9.8392051\times10^{-1}$$

$$0.00000000002 = 2\times10^{-11}$$

$$8.53427501 = 8.53427501\times10^0$$

$$63.52893 = 6.352893\times10^1$$

$$8253\times10^{-4} = 8.523\times10^3\times10^{-4} = 8.253\times10^{-1}$$

فعالیت

اعداد ذیل را به روش علمی عدد نویسی بنویسید.

a) 0.0012 b) 10.0101 c) 23.567

d) 22.52×10^{-18} e) 23 f) 823.97×10^{43}

مثال سوم: فاصلهٔ اوسط زمین از آفتاب $1.5\times10^8 km$ می باشد اگر سرعت آفتاب $3\times10^5 km/sec$ باشد وقت تقریبی بر حسب ساعت (hr) را معلوم کنید، که شعاع آفتاب در آن وقت به زمین میرسد جواب خود را به روش علمی عدد نویسی بنویسید.

حل:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{1.5\times10^8}{3\times10^5}sec = \frac{10^{8-5}}{2}sec = \frac{10^3}{2}sec = 500\,sec = 5\times10^2\,sec$$

$$1hr = 60\times60\,sec = 3600\,sec = 3.6\times10^3\,sec$$

$$5\times10^{2}\ \text{sec}=\frac{5\times10^{2}}{3.6\times10^{3}}h=\frac{50}{36\times10}=\frac{5}{36}h=0.139h=1.39\times10^{-1}hr$$

تمرین

1 - اعداد ذیل را به روش علمی عدد نویسی بنویسید.

a) 346×10^{9} b) 23456392×10^{0}

c) 0.001×10^{-5} d) 23.01×10^{3}

e) 0.4342×10^{-19} f) 35.8

g) 935×10^{4} h) 94.1×10^{5}

i) 0.00035×10^{11}

2 - اعداد ذیل را به روش علمی عدد نویسی بنویسید:

سرعت نور در خلا $299792.5km/sec$ می باشد.

اوسط فاصلهٔ آفتاب از زمین $150000000km$ می باشد.

اوسط کتلهٔ زمین 5980000000000000000000 تن متریک می باشد.

فاصلهٔ تقریبی مهتاب از زمین $380000km$ است.

قطر یک اتوم $0.000000015cm$ می باشد.

یک مایکرون $\frac{1}{1000000}m$ می باشد.

نکات مهم فصل

• اعدادیکه به شکل $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$، p و q اعداد تام اند) نوشته شده بتوانند اعداد نسبتی می باشند.

• کسور اعشاری متوالی و کسور اعشاری مختوم اعداد نسبتی(ناطق) اند.
• قوانین طاقت: اگر a و b اعداد حقیقی خلاف صفر و m و n اعداد تام باشند، پس:

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ c) $(a^m)^n = a^{mn}$

d) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ e) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ c) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

• اگر a و b دو عدد نسبتی (ناطق) باشد $a+b, a-b$ و ab اعداد نسبتی (ناطق) اند.
• $a \div b$ عدد نسبتی (ناطق) است که $(b \neq 0)$ باشد.
• $a+b=b+a$ و $ab=ba$ می باشد.
• $a-b \neq b-a$ اگر $(a \neq b)$ باشد.
• $a \div b \neq b \div c$ اگر $a \neq b$ و $a \neq 0$ و $b \neq 0$ باشد.
• اگر a یک عدد نسبتی(ناطق) باشد؛ پس:

$$a+0=0+a=a$$
$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$
$$a \div 1 \neq 1 \div a$$

• برای هر سه عدد نسبتی (ناطق) b,a و c داریم که:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ اگر $c \neq 1$ باشد.

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$$

$(a-b) \div c = (a \div c) - (b \div c) - (b \div c)$ اگر $c \neq 0$ باشد.

• معکوس ضربی عدد نسبتی(ناطق) $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ عبارت از $\frac{q}{p}$ $(p \neq 0)$ می باشد.

- اگر $a=\frac{p}{q}$ یک عدد نسبتی باشد؛ پس معکوس ضربی a با a^{-1} نشان داده می شود و $a^{-1}=\frac{q}{p}$ می باشد.
- اگر a یک عدد نسبتی(ناطق) خلاف صفر باشد؛ پس $(a^{-1})^{-1}=a$ است.
- صفر معکوس ضربی ندارد.
- $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$
- بین دو عدد نسبتی(ناطق)، بی نهایت اعداد نسبتی(ناطق) وجود دارند.
- اعداد بزرگتر و اعداد کوچکتر را به شکل $k\times10^{n}$ نوشته کرده می توانیم طوری که $1\le k<10$ که این روش را به نام روش علمی عدد نویسی یاد می کنند.
- اگر b,a و c اعداد نسبتی(ناطق) باشند:

$a\div b\neq b\div a$

$(a\div b)\div c\neq a\div(b\div c)$

$a\div(b+c)\neq(a\div b)+(a\div c)$

$a\div(b-c)\neq(a\div b)-(a\div c)$

- در ساده ساختن افاده ها، در قدم نخست( ) سپس{ } و در اخیر [ ] رفع می شود.
- عملیه های اساسی از طرف چپ به ترتیب تقسیم، ضرب، جمع و تفریق انجام می شوند.

تمرينات فصل

1- ساده کنید:

a) $10+\frac{8}{9}$

b) $\frac{7}{-4}+(\frac{-5}{6})+\frac{17}{20}+2$

c) $-\frac{1}{6}+\frac{3}{14}+(-\frac{3}{7})$

d) $\frac{2}{3}+(\frac{11}{15})+\frac{3}{20}+\frac{1}{-5})$

e) $-\frac{1}{3}+\frac{8}{7}-\frac{2}{21}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}$

f) $0.01-0.75+2.25-1.1+12$

2- کسرهای ذیل را به شکل کسر اعشاری بنویسید:

$\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{2}{11}$ ، $-\frac{33}{20}$ ، $\frac{7}{8}$ ، $\frac{3}{5}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{5}{12}$

3- جمع کنید:

a) $-3.4+1.8$

b) $\frac{-3}{4}+(-\frac{3}{4})$

c) $-0.9+2.5$

d) $-\frac{1}{12}+(-\frac{7}{12})$

4- اگر $x=1$ باشد قیمت $-\frac{3}{5}+x$ را معلوم کنید.

5- در مساوات های زیر هر خاصیت اعداد نسبتی (ناطق) را در مقابل آن بنویسید:

a) $\frac{9}{11}+\frac{5}{7}=\frac{5}{7}+\frac{9}{11}$

b) $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$

c) $2+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=(2+\frac{1}{2})+\frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{5}(\frac{1}{2}\times\frac{1}{7})=(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2})\frac{1}{7}$

e) $\frac{2}{3}(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})=(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4})+(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5})$

f) $\frac{2}{3}+0=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

6- ساده کنید:

a) $220-64\div 2$

b) $(-8)\times(-5)\div 5-5$

c) $4[28\div\{-8+3(5-7)\}]$

7- نشان دهید که:

$\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5})\neq(\frac{3}{4}+\frac{1}{2})(\frac{3}{4}+\frac{1}{5})$

8- ضرب کنید:

a) $(0.5)(-0.5)(-0.5)$ b) $500\times(0.01)$

c) 2000×0.001 d) $\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{2}\cdot\frac{4}{3}$

e) $(1.6)(1.6)$ f) $(-0.25)(-0.25)$

9- اگر $n=0.24$ باشد قیمت $\frac{7.2}{n}$ را معلوم کنید.

10- تقسیم کنید:

a) $11.128\div 0.52$ b) $10.86\div 0.6$

c) $0.1\div 0.01$ d) $0.1\div 0.0001$

11- ساده سازید:

a) $\left\{(\frac{3}{2})^4\div(\frac{9}{4})^2\right\}\div(\frac{5}{6})^2$ b) $(-\frac{2}{3})^3\div(\frac{4}{-5})^2-(-\frac{1}{5})^3\div(\frac{-1}{5})^2$

c) $(\frac{1}{4})^{-1}$ d) $(\frac{2}{5})^{-2}$

e) $(-\frac{1}{3})^{-3}$ f) $(81)^{\frac{-3}{2}}$

12- اعداد ذیل را به روش علمی عدد نویسی بنویسید:

a) 0.00000002 b) 0.9839 c) 52.8×10^{11}

d) 0.00001 e) 0.00512 f) 6.456

g) 73.89 h) 411.5×10^{-11}

13- عدد نسبتی که صورت آن 2^3+3^2 و مخرج ان 2^2+3^2 باشد عبارت است از:

a) $\frac{17}{13}$ b) $\frac{12}{31}$ c) $\frac{15}{13}$ d) $\frac{17}{31}$

14- عدد نسبتی $\frac{0.12}{12}$ مساوی است به:

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{1}$ c) $\frac{1}{100}$ d) $\frac{10}{1}$

15- عدد نسبتی $\frac{13}{11}$ مساوی است به:

a) $11.\overline{8}$ b) $1.1\overline{8}$ c) $1.\overline{18}$ d) هیچ کدام

16- قیمت $8.597\times 26.523+3.477\times 8.597$ مساوی است به:

a) 256.19 b) 257.19 c) 256.91 d) 257.91

17- عدد $[(\frac{2}{3})^3]^4$ مساوی است به:

a) $(\frac{2}{3})^{81}$ b) $(\frac{2}{3})^{12}$ c) $(\frac{2}{3})^{7}$ d) $(\frac{2}{3})^{34}$

18- $(-\frac{5}{7})^{-1}$ مساوی است به:

a) $-\frac{7}{5}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $-\frac{5}{7}$

19- $(-\frac{27}{31})^{-7} \div (-\frac{27}{31})^{-5}$ مساوی است به:

a) $(-\frac{27}{31})^{-12}$ b) $(\frac{27}{31})^{-12}$ c) $(-\frac{27}{31})^{2}$ d) $(-\frac{27}{31})^{-2}$

20- در اعداد نسبتی زیر، کدام عدد کسر مختوم اعشاری را نشان نمی دهد؟

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{25}$ d) $\frac{1}{40}$

21- کدام یک از اعداد زیر عدد نسبتی نیست؟

a) $\frac{2}{3}$ b) 2.020020002 c) $2.\overline{52}$ d) 7.9

22- عدد $\frac{1}{8}$ مساوی است به:

a) 0.125% b) 125% c) 12.5% d) 45%

23- عدد $\frac{4}{5}$ مساوی است به:

a) 40% b) 80% c) 50% d) 45%

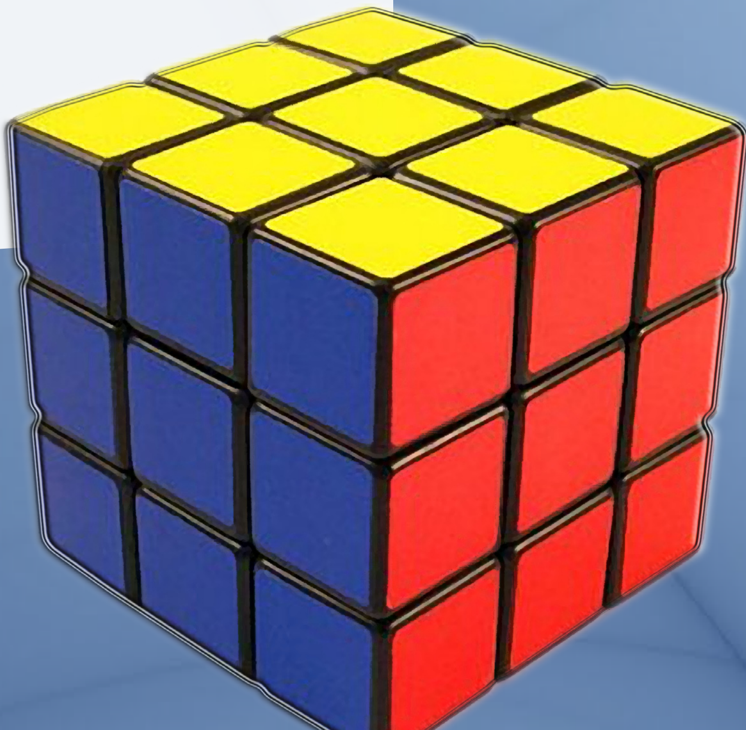
24- عدد 0.05 مساوی است به:

a) 0.5% b) 0.05% c) 50% d) 5%

فصل دوم

پولینوم(Polynome)
یا (Polynomial)

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



افاده های الجبری
(Algebraic Expressions)

آیـا می توانید بگویید که از افاده های الجبری

$$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3 \text{ و } \sqrt{y^2+1} \text{ ، } \frac{x^4-1}{x^2}$$

کدام یک افادۀ الجبری ناطق و کدام یک افاده غیرناطق می باشد؟

متحول و ثابت(variable and constant): متحول یک سمبول است که به جای هر عنصر یک ست غیر خالی وضع می شود؛ طور مثال: اگر $A=\{x / x\in IN \text{ و } x\le 10\}$ باشد.

x می تواند در ست A قیمت های اعداد طبیعی از یک الی10 را بگیرد. x را متحول (Variable) می گویند. متحولین به صورت عموم توسط حروف کوچک زبان انگلیسی x, y, z و غیره نشان داده می شوند.

قیمت یک عدد تغییر نمی کند؛ به طور مثال: عدد 4 هیچگاه با 5 یا 3 ویا با کدام عدد دیگری مساوی شده نمی تواند، پس تمام اعداد حقیقی، ثابت ها(Constants) می باشند.
علاوه از اعداد حقیقی، حروف زبان انگلیسی مثل...a,b,c و غیره به عوض ثابت ها نیز استعمال میگردند.

افادۀ الجبری(Algebraic Expression): افادۀ الجبری آنست که از یک ثابت یا یک متحول و یا از ترکیب ثوابت و متحول ها تشکیل شده باشد.
در مثال های زیر افاده های الجبری را مشاهده کنید:

$$5\sqrt{x} \text{ ،} 4x+5+\frac{15}{t^2} \text{ ،} \sqrt{3}x \text{ ،} x^2-x+1 \text{ ،} x \text{ ،} -12 \text{ ،} 12$$ و غیره.

که در افادۀ الجبری $3x^2$ عدد 3 را ضریب (Coefficient) میگویند. در افادۀ $-\frac{1}{2}y$ عدد $-\frac{1}{2}$ و در افادۀ x عدد یک ضریب می باشد، $-3x^5y^5$ و $15x^5y^5$ حدود مشابه (Liketerms) می باشند، که متحولین مشابه، دارای توان های مساوی بوده؛ اما ضریب های عددی آن ها باهم فرق دارند.

اقسام افاده های الجبری: افاده های الجبری به سه قسم اند:

1. افاده های الجبری پولینومی(Polynomial algebraic expressions):

پولینوم: افادۀ الجبری یک یا چند حده که توان های متحول شان در ست اعداد مکمل شامل باشند، پولینوم نامیده می شود.

x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$، $x-1$، 12 و غیره پولینوم اند، اما $x^{-2}+x-1$، $\frac{1}{x}+x$ یا $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولینوم نمی باشند.

مشخصات پولینوم عبارت اند از:

- توان تمام متحولین اعداد مکمل باشد
- در مخرج متحول نداشته باشد.
- متحول زیر جذر نباشد.

مثال اول: در افاده های $a)\sqrt{2}x$, $b)2\sqrt{x}$, $c)\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3}$, $d)x^{\frac{1}{2}}$

$e)x^{-3}+x^2$, $f)8p^2+p^{2.2}$ $g)9x^2-\frac{7}{x^2}$, $h)88$, $i)6a^2-4a$

a,h و i پولینوم ها هستند؛ اما b,c,d,e,f و g پولینوم ها نیستند.

به یاد داشته باشید که هر پولینوم، یک افادۀ الجبری ناطق می باشد؛ اما هر افادۀ الجبری ناطق، پولینوم نمی باشد؛ به طور مثال: $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ یک افادۀ الجبری ناطق است، لیکن پولینوم نیست.

12نیز یک پولینوم است، زیرا که $12=12x^0$ است صفر نیز در ست اعداد مکمل شامل می باشد؛ اما $5\sqrt{x}$ و $\frac{5}{x^3}$ پولینوم نیست؛ زیرا $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$ و $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ که $\frac{1}{2}$ و -3 در ست اعداد مکمل شامل نمی باشد.

یک پولینوم توسط یک حرف مثل P نشان داده می شود؛ شکل عمومی یک پولینوم که از

یک حرف (متحول) تشکیل شده باشد طور زیر می باشد:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

nیک عدد مکمل و ضرایب $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, an$ اعداد حقیقی اند؛ اگر $a_n \neq 0$ باشد؛

پس n درجهٔ پولینوم می باشد.

فعالیت

در افاده های الجبری -8، $-8x^2$، $\sqrt{8}x^3$، $\frac{1}{x}$، x، $2x^3 - x^2$ و $8\sqrt{x}$ کدام یک پولینوم و کدام یک پولینوم نمی باشد؟

مثال دوم: در پولینوم $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ ، $n = 3$ ، $a_n = -5$ ، $a_2 = 1$ ، $a_1 = -1$ و $a_0 = 12$ می باشد و در پولینوم $11x^2 - 1$ ، $n = 2$، $a_n = 11$، $a_1 = 0$ ، و $a_0 = -1$ می باشد.

2. افادهٔ الجبری ناطق (Rational algebraic expression): اگر بتوانیم که یک افادهٔ الجبری را به شکل $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ بنویسیم طوری که p و q پولینوم ها باشند این گونه افادهٔ الجبری را افادهٔ الجبری ناطق می گویند، به طور مثال: افادهٔ $x^2 - \frac{1}{x^2}$ که یک متحول دارد به شکل $\frac{x^4 - 1}{x^2}$ میتوانیم بنویسیم و یک افادهٔ الجبری ناطق می باشد؛ چون مخرج هر افادهٔ الجبری میتواند عدد یک باشد؛ پس $(x^2 - 1)$ نیز یک افادهٔ الجبری ناطق می باشد؛ زیرا که $x^2 - 1 = \frac{x^2 - 1}{1}$ می باشد.

3. افادهٔ غیر ناطق(Irrational algebraic expression): عبارت از افادهٔ الجبری است که آن را به شکل خارج قسمت دو پولینوم نوشته کرده نمیتوانیم؛ طور مثال: $\sqrt{xy}$ ،

$\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ و $\sqrt{y^2+1}$ مثال های افاده های الجبری غیرناطق می باشند.

یک افادهٔ الجبری امکان دارد ناطق، غیرناطق و یا پولینوم باشد. پولینوم افادهٔ الجبری یک یا چند حده یی است که توان های متحول و یا متحولین آن در ست اعداد مکمل شامل باشند.

تمرین

1. از افاده های الجبری زیر کدام یک افادهٔ الجبری ناطق، غیر ناطق و یا پولینوم می باشد؟

$$\frac{1}{x} \quad , \quad \sqrt{x}-\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{3x^2}{2} \quad , \quad \frac{m+3}{6} \quad , \quad x+\frac{1}{x} \quad , \quad 3x^2+\frac{xy}{2}$$ و 13

2. در افاده های الجبری زیر کدام یک، پولینوم و کدام یک پولینوم نمی باشد؟

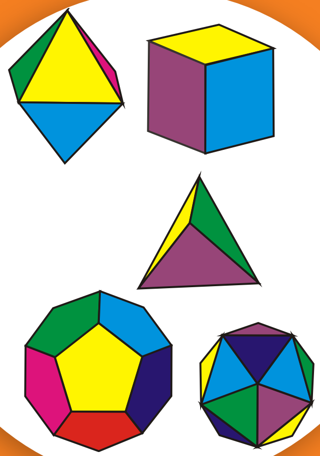
$$3x^2+\frac{xy}{2} \quad , \quad -20a^3b+28ab^4 \quad , \quad \frac{1}{7}x^3-x \quad , \quad 3x$$

$$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5} \quad , \quad 8\sqrt{x} \quad , \quad 8x^{-8} \quad , \quad 3x \quad , \quad -0.03 \quad , \quad \sqrt{8}x^8$$

3. در پولینوم $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ ، a_1,a_2,a_3,a_n و a_0 را نشان دهید.

4. در پولینوم $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ ، a_1,a_2,a_3 و a_0 را نشان دهید.

اقسام پولینوم و درجهٔ آن:



آیا می توانید بگویید که درجهٔ پولینوم های $12y^5x^3 + x^4y^3$، $12x^3$، $-x^2 - x$ و 12 چند می باشد؟

$3x$ یا $16x$ مونوم یا (Monomial) یک افاده الجبری یک حده است و $x-4$ یا $ab-y$ یک افادهٔ الجبری دو حده (Binome) یا (Binomial) و $2x^3 - x - 1$ افادهٔ الجبری سه حده (Trinomial) می باشد و افادهٔ الجبری $\sqrt{2x} - \frac{1}{y} + 1$ به نام مولتینوم (Multinomial) یاد می شود.

بعضی اوقات پولینوم از یک، دو، سه و یا چندین متحول تشکیل شده می باشد. پولینوم $2x^3 - 8x^2 + 7x + 11$ دارای یک متحول، پولینوم $2x^3 - 3y$ دارای دو متحول و پولینوم $x + y + z$ دارای سه متحول می باشد که در جدول زیر نشان داده شده است:

متحول	مونوم (یک حده)	باینوم (دو حده)	ترینوم (سه حده)
یک متحول	$5x^3$	$5y^2 + 3y$	$3x^2 + 2x - 4$
دو متحول	$7x^2y$	$7x^2 - 4y^3$	$6x^2 + 5x - 3y^2$
سه متحول	$4xyz^2$	$8a^2b + 4c$	$3a^2b^2 + 6c^2 - z^5a$

فعالیت

در افاده های الجبری $ax^2 + bx + c$، $2x - y$، 15، $-3x$ و $4x^2 - 4y$ مونوم، باینوم و ترینوم را نشان دهید.

درجۀ یک پولینوم(Degree of a Polynome): اگر پولینوم از یک حرف تشکیل شده باشد، بزرگترین توان این حرف عبارت از درجۀ پولینوم می باشد؛ طور مثال: درجۀ پولینوم $x^5+1+2x+x^3-$ عبارت از 5 می باشد. اگر پولینوم از چند حرف (متحول) تشکیل شده باشد درجۀ مونومی که توان بزرگتر دارد؛ عبارت از: درجۀ پولینوم می باشد؛ مثلاً درجۀ پولینوم $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ عبارت از ($1+5=6$) است و این پولینوم نظر به x درجه سوم و نظر به y درجه پنجم می باشد؛ اگر درجه یک پولینوم عدد 1 باشد پولینوم را پولینوم خطی (Liner Polynome) و اگر درجه پولینوم عدد 2 باشد پولینوم را پولینوم درجه دوم (Quadratic Polynome) می گویند و اگر درجه پولینوم عدد 3 باشد به نام پولینوم درجه سوم (Cubic Polynomial) و هم مونوم $3x^2$ درجۀ دوم، و درجۀمونوم $3x^2y^3$ عبارت از 5 و درجۀ مونوم 12 صفر می باشد، این گونه پولینوم را پولینوم ثابت می گویند؛ زیرا $12=12x^0$.

پولینوم ثابت: پولینومی است که درجۀ آن صفر باشد یا به عبارت دیگر پولینومی است که ضرایب تمام متحولین آن صفر باشد.

مثال اول: اگر $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یک پولینوم ثابت باشد قیمت های m و n را دریابید.

حل: چون پولینوم داده شده ثابت می باشد؛ پس ضریب هر حد متحول صفر است.

$$5-n=0 \qquad\qquad 2m-4=0$$
$$n=5 \qquad\qquad 2m=4$$
$$m=2$$

پولینوم صفری(Zero Polynome): اگر حد ثابت پولینوم ثابت صفرباشد این گونه پولینوم به نام پولینوم صفری یاد می شود؛ به طور مثال: $P(x)=0$ ، درجۀ پولینوم صفری تعریف نشده است.

مثال دوم: قیمت a را دریابید اگر $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ یک پولینوم صفری باشد.

حل: در پولینوم صفری هر حد صفر می باشد؛ پس:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

مثال سوم: درجهٔ پولینوم های $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ و $h(x)=\sqrt{3}$ را دریابید.

حل: درجهٔ پولینوم $P(x)$ عبارت از 5 است و درجهٔ پولینوم $g(x)$ نیز 5، $(n=5)$ می باشد، اما درجهٔ پولینوم $h(x)$ صفر می باشد.

فعالیت

a: درجهٔ پولینوم های زیر را تعیین کنید:

$$x^2-x^3+2x+5x^5 \quad , \quad x-1 \quad , \quad 15 \quad , \quad 2m^3n^2-3mn^3-mn$$

b : درجهٔ این پولینوم ها را نظر به هر متحول تعیین کنید:

$$x^2-x^3+2x+5x^5 \quad , \quad x-1 \quad , \quad 15 \quad , \quad 2m^3n^2-3mn^3-mn$$

پولینوم مکمل و ناقص: پولینوم مکمل پولینومی است که تمام حدود آن از بزرگترین توان متحول تا عدد ثابت موجود باشد.

پولینوم های $x^3+1+2x-x^2$ ، $x-1$ و 51 پولینوم های مکمل، اما پولینوم های x^2-1 و x^3+x+1 پولینوم های ناقص می باشند ما می توانیم که پولینوم های ناقص را به شکل پولینوم های مکمل بنویسیم؛ مانند: $x^2-1=x^2+0.x-1$ و

$$x^3+x-1=x^3+0.x^2+x-1$$

پولینوم های منظم و غیر منظم: پولینوم های $2x^3-3x^2+4x-1$ و $-11+12x+13x^2-x^3$ پولینوم های منظم، اما پولینوم $3x^4-x+1+x^3+x^2$ یک پولینوم غیر منظم می باشد، که می توانیم یک پولینوم غیر منظم را به شکل پولینوم منظم بنویسیم؛ به طور مثال $3x^4+x^3+x^2-x+1$ یا $1-x+x^2+x^3+3x^4$ پولینوم های منظم اند.

پولینوم های نزولی و صعودی

(Descending and ascending Polynomes):

اگر یک پولینوم از بزرگترین توان یک متحول به طرف کوچکترین توان ترتیب شده باشد نزولی و اگر از کوچکترین به بزرگترین توان ترتیب شده باشد ترتیب صعودی می گویند.

طور مثال: پولینوم $x^4+3x^3+x^2+x+1$ به شکل نزولی و پولینوم $1+x+x^2+3x^2+x^4$ به شکل صعودی ترتیب شده است.

اگر یک پولینوم از دو یا چند متحول تشکیل شده باشد، می توانیم که پولینوم را نظر به هر حرف به شکل صعودی یا نزولی ترتیب نماییم، طوریکه پولینوم $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ نظر به x به طور نزولی و نظر به y به طور صعودی ترتیب شده است.

فعالیت

پولینوم های زیر را به شکل صعودی ترتیب کنید:

$$4x-5+6x^2+8x^3\ ,2y^2-4y+3-3y^4+y^3\ ,2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

مثال چهارم: پولینوم $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ را نظر به y به شکل صعودی بنویسید.

حل: $P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$

پولینوم های معادل: پولینوم هایی اند که دارای یک متحول بوده و ضرایب حدود مشابه آن ها باهم مساوی باشند.

مثال5: اگر پولینوم x^2+3x+2 با پولینوم $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ معادل باشد، قیمت های n,m و p را دریابید.

حل:

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$

در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
m &= 1 \\
-2m+n &= 3 \qquad \Rightarrow n=5 \\
m-n+p &= 2 \qquad \Rightarrow p=6
\end{aligned}
$$

پولینوم هایی که از یک متحول تشکیل شده باشند بزرگترین توان این حرف درجه پولینوم می باشد و اگر پولینوم از چند حرف تشکیل شده باشد درجۀ مونومی که بزرگترین توان را دارا باشد عبارت از درجۀ پولینوم است، و پولینوم هایی که دارای یک متحول بوده و ضریب های حدود مشابه آن ها باهم مساوی باشند به نام پولینوم های معادل یاد می شوند.

تمرین

1. در افاده های زیر مونوم، باینوم و ترینوم را نشان دهید و نیز درجه های آن ها را دریابید.

$$\frac{1}{2}x^2y^5 \quad , \quad x^2-y+4 \quad , \quad x-1$$

$$x-x^2-x^3 \quad , \quad 12x \quad , \quad -12$$

2. در پولینوم های زیر پولینوم های مکمل و ناقص را نشان دهید و پولینوم های ناقص را به شکل پولینوم های مکمل بنویسید.

$$x \quad , \quad x+1 \quad , \quad x^2-1 \quad ,$$

$$2x^2-2x-2 \quad , \quad 15 \quad , \quad x^3+x-1$$

3. اول درجۀ هر پولینوم را که در زیر داده شده است دریابید و بعد به شکل نزولی ترتیب نمایید.

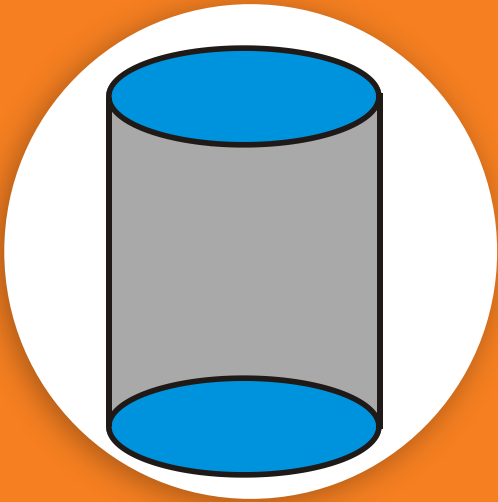
$$4x-5+6x^2+8x^3$$

$$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$$

$$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$$

4. اگر $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ باشد قیمت های n,p و c را دریابید.

5. قیمت های b,a و c را دریابید؛ اگر: $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ و $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ پولینوم های معادل باشند.



دریافت قیمت پولینوم

آیا می توانید بگویید که برای $x=-1$
قیمت پولینوم $P(x)=x^3-x^2-x-1$
یعنی $P(-1)=?$ چند می شود؟

اگر در یک پولینوم به عوض متحول یک عدد حقیقی را وضع کنیم یک عدد حقیقی به دست می آید که همین عدد حقیقی قیمت این پولینوم می باشد. برای $x=2$ قیمت پولینوم $P(x)=3x+2$ عبارت از $P(2)=3\cdot 2+2=8$ می باشد.

مثال اول: $P(5)$ ، $P(-1)$ و $P(0)$ پولینوم $P(x)=2x^2-7x+1$ را دریابید.

حل:

$$P(5)=2\cdot 5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$

$$P(0)=1$$

$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

$P(0)$، $P(-1)$ و $P(1)$ پولینوم $P(x)=x^5-x^3-x-1$ را دریابید.

مثال دوم: اگر $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ باشد $P(-\frac{1}{4})$ را دریابید.

حل

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

مثال سوم: طوری که میدانید محیط دایره (Circumference)از فورمول $C = 2\pi r$

به دست می آید، اگر $\pi = \frac{22}{7}$ و r شعاع دایره باشد.

در صورتی که شعاع دایره $r = 3\frac{1}{2}cm$ باشد، محیط این دایره (C) را دریابید.

حل:

$$C = 2\pi r = 2.\frac{22}{7}.\frac{7}{2}cm = 22cm$$

مثال چهارم: اگر b, a و c طول اضلاع مثلث و p نصف محیط مثلث باشد یعنی

$p = \frac{a+b+c}{2}$ مساحت مثلث از فورمول $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ به دست می آید.

اگر طول اضلاع مثلث $a = 9cm$, $b = 12cm$ و $c = 15cm$ باشد مساحت این مثلث را دریابید.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18\cdot9\cdot6\cdot3} = \sqrt{2\cdot9\cdot9\cdot2\cdot3\cdot3} = \sqrt{2^2\cdot3^2\cdot9^2} = 2\cdot3\cdot9 = 54cm^2$$

فعالیت

حجم استوانه از فورمول $V = \pi r^2 h$ به دست می آید که V حجم استوانه، r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه می باشد. اگر $r = 5cm$ و $h = 21cm$ باشد حجم استوانه را دریابید.

مثال پنجم: اگر شعاع این توپ 6cm باشد حجم این توپ را دریابید.

حل:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6cm)^3 = \frac{4}{3}\pi(216cm^3) = 288\pi cm^3$$

اگر در یک پولینوم$P(x)$ عوض x قیمت داده شده را وضع کنیم، قیمت پولینوم به دست می آید.

تمرین

1. اگر پولینوم $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ باشد، $p(-1)$ و $p(\frac{1}{2})$ را دریابید.

2. اگر در پولینوم $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ قیمت $p(2)=17$ باشد قیمت k را دریابید.

3. قیمت پولینوم $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ را برای $x=-\frac{1}{2}$ دریابید.

4. در پولینوم های $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ و $D=x^2+4x-4$ برای $x=4$ قیمت کدام پولینوم از عدد 100 زیاد می باشد؟

a) C b) D c) A d) B

5. در پولینوم های زیر برای $x=5$ کدام پولینوم بزرگترین قیمت را دارا می باشد؟

a) x^2-2x+6

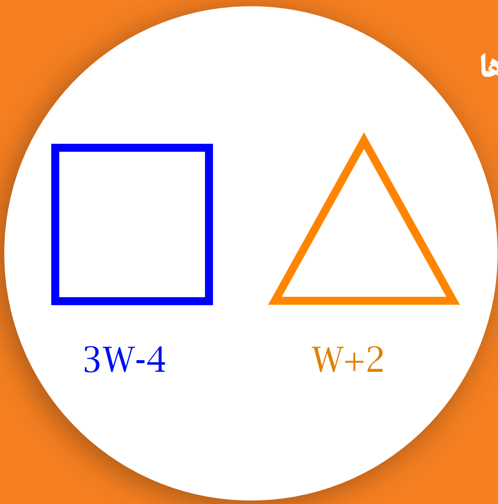
b) $3x^4+6x+12$

c) $-x^3-40x-300$

d) x^5-120x^4+10

6. اگر $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ باشد، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ و $p(-\frac{1}{2})$ را دریابید.

عملیه های چهار گانۀ پولینوم ها



- اگر هر ضلع مربع $3w-4$ و هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع $w+2$ باشد یک افادۀ الجبری را بنویسید که محیط هر دو شکل را نشان دهد.
- اگر $A=8x^2-2x+3$ و $B=9x-5$ باشد $A+B$ و $A-B$ را دریابید.

1- عملیۀ جمع: حدود مشابه (Like terms) باهم جمع و نیز حدود مشابه یکی از دیگری تفریق می شود که این هر دو عملیه به صورت افقی و عمودی انجام شده می تواند

مثال 1: اگر $A=-3cd^2-2cd+5$ و $B=9cd-7cd^2-5$ باشد $A+B$ را دریابید.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعالیت

اگر $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ و $C=2a+4$ باشد مجموع این سه پولینوم را دریابید. $(A+B+C=?)$

مثال دوم: $A+B+C$ را دریابید اگر:

$A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ و $C=x^2-5x+4$ و نیز اگر

$A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ و

$C=a^4b+a^3b^2-2c$ باشد.

حل: در اول پولینوم ها را به شکل منظم می نویسیم و بعد حدود مشابه را باهم جمع می کنیم:

$$
\begin{array}{r}
3x^2+2x+1 \\
-2x^2+3x-5 \\
+\quad x^2-5x+4 \\
\hline
2x^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b \\
\qquad\qquad a^3b^2-2a^2b^3+4b-4 \\
a^4b+a^3b^2\qquad\qquad -2c \\
\hline
2a^4b\qquad -5a^2b^3-6c+2b-4
\end{array}
$$

2- عملیهٔ تفریق: در عملیهٔ تفریق معکوس جمعی مفروق را با مفروق منه جمع می کنیم یا به عبارت دیگر علامه های مفروق را تغییر می دهیم.

مثال اول: پولینوم B را از پولینوم A تفریق نمایید اگر $A=-x^3+x^2+x-7$ و $B=-x^3+x^2+4x+3$ باشد و نیز اگر $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ و $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ باشد.

حل:

$$
\begin{array}{l}
A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\
-B=-b^2\mp 3c^2\mp 3d^2\mp 3e^2\mp f^2 \\
\hline
A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
A=-x^3+x^2+x-7 \\
-B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\
\hline
A-B=\qquad -3x-10
\end{array}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
&-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3) \\
&=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3 \\
&=-3x-10
\end{aligned}
$$

باید به یاد داشته باشیم که غرض ساده ساختن یک پولینوم حدود مشابه(Like terms) را باهم جمع و یا از یکدیگر تفریق می کنیم.

به طور مثال:

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

فعالیت

در پولینوم های زیر حدود مشابه(Like terms) را نشان دهید.

$$-t+5t^2-6t^2+6t-3 \qquad 9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$$

$$3p-4p^2+6p+10p^2 \qquad 2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$$

مثال دوم: با پولینوم $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ کدام پولینوم را جمع کنیم تا حاصل جمع $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شود؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4 \pm 2a^3b \pm a^2b^2 \mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

مجموع پولینوم های $4x+6-2x^2$ و $3x^2-x^3-3$ را از مجموع پولینومهای x^3+x^2-2x و $-2x^3+3x-7$ تفریق کنید.

مثال سوم: تفریق کنید.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y \mp 303x^3y^2 \pm 101x^2y^3 \mp 404xy^4 \pm 505\ y^5} \\ 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{-3ax \mp 5bx \mp 8cx \mp 11dx} \\ \qquad 0 \end{array}$$

مثال چهارم: حدود مشابه (Like terms) را باهم جمع و ساده کنید.

$$20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4 \qquad 8-10+x-7+x=2x-9$$

$$y^2-1+y^2-1=2y^2-2 \qquad ab+a-b-a=ab-b$$

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$
$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

باید به یاد داشته باشیم که اگر Q, P و R پولینوم ها باشند؛ پس:

(خاصیت تبدیلی عملیهٔ جمع)...................... $P+Q=Q+P$

(خاصیت اتحادی عملیهٔ جمع)...... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع)............ $P(Q+R)=PQ+PR$

یا: $(Q+R)P=QP+RP$

در عملیه های جمع و تفریق پولینوم ها حدود مشابه باهم جمع و یا از یکدیگر تفریق می شوند. در عملیهٔ جمع پولینوم هاخاصیت های تبدیلی و اتحادی صدق می کند و در عملیهٔ تفریق معکوس جمعی مفروق با مفروق منه جمع می شود و خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع پولینوم ها نیز صدق می کند.

تمرین

1. مجموعهٔ دو پولینوم x^2+2x-y^2 است اگر یک پولینوم $x^2-2xy+3$ باشد، پولینوم دیگری را دریابید.
2. پولینوم $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ را از پولینوم $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ تفریق کنید.
3. از پولینوم $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$، پولینوم $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ را تفریق کنید.
4. اگر $A=a^3+2a^2-6a+7$ ، $B=a^3+2a+5$ و $C=2a^3-a^2+2a-8$ باشد مجموعهٔ این سه پولینوم را دریابید. $(A+B+C=?)$
5. حاصل جمع افاده $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ مساوی است به:

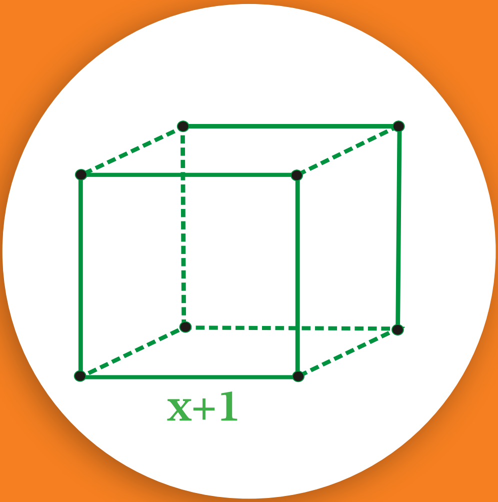
c) $3ab^2+8a+2$ b) $3ab^2+8a$ a) $-3ab^2+8a+2$

6. جمع کنید:

$$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$$

7. اگر دو طیاره از یک میدان هوایی در جهت مقابل همدیگر پرواز کنند، در صورتی که 2 ساعت بعد فاصلهٔ یک طیاره از میدان هوایی $x^2+2x+400$ میل و فاصلهٔ طیارهٔ دیگر از همین میدان هوایی $3x^2-50x+100$ میل باشد فاصله بین این دو طیاره را دریابید.

ضرب پولینوم ها



حجم مکعبی را دریابید که هر ضلع آن $(x+1)$ سانتی متر باشد.

ضرب مونوم در مونوم: اگر مونوم $3r^2s^3$ را در مونوم $5r^4s^5$ ضرب کنیم حاصل ضرب آن $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ می شود.

فعالیت

حاصل ضرب $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$, $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ و $(-30a^2b)(-5ab)$ را دریابید.

مثال اول: حاصل ضرب های زیر را به دست آورید:

$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$

$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$

$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$

$(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$

$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$

$x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$

$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$

$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$

$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$

$(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$

$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$

$(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$

$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$

ضرب مونوم در پولینوم:

مثال دوم: حاصل ضرب های زیر را دریابید.

$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$

$x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$

$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$

$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$

فعالیت

حجم مکعبی را دریابید که طول آن $2x$ ، عرض آن x و ارتفاع آن $x+2$ باشد.

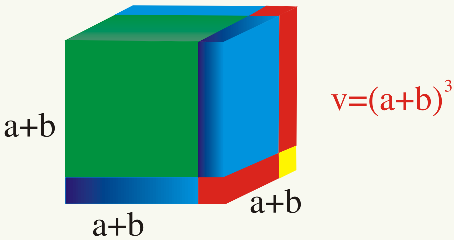
ضرب پولینوم در پولینوم

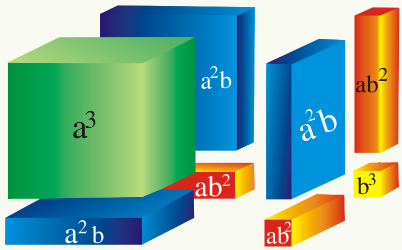
مثال سوم: (a) حاصل ضرب $(x-4)(x-5)$ را دریابید.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$





c: اگر $P(x)=x^3+2x$ و $Q(x)=2x^2-x+1$ باشد.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3\cdot(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x\cdot(-x)+2x\cdot 1$$
$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

به یاد داشته باشید اگر Q, P و R پولینوم ها باشند:

(خاصیت تبدیلی ضرب) $P \cdot Q = Q \cdot P$

(خاصیت اتحادی ضرب) $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$

فعالیت

اگر $P(x) = 2x^2 - x - 1$ و $Q(x) = 4x - 8$ باشد خاصیت های تبدیلی و اتحادی ضرب را در آن ها بررسی کنید.

در جدول زیر مساحت(Area) اشکال هندسی را دریابید.

مساحت	طول داده شده	اشکال هندسی
$n^2 + n - 20$	طول آن $n+5$ ، و عرض آن $n-4$	مستطیل
$6y^2 + 3y - 3$	طول آن $3y+3$ ، و عرض آن $2y-1$	مستطیل
$b^3 - \frac{5}{2}b^2 + 2b - 5$	قاعدهٔ آن $2b-5$ ، و ارتفاع آن b^2+2	مثلث
$m^2 + 26m + 169$	هر ضلع آن $m+13$، می باشد	مربع
$4g^2 - 16g + 16$	هر ضلع آن $2g-4$ می باشد	مربع
$(9c^2 + 12c + 4)\pi$	شعاع آن $3c+2$ می باشد	دایره

فعالیت

حاصل ضرب $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ را دریابید.

سؤال: پیاده روهای چهار سمت یک حوض مستطیل شکل، سمنت شده است که عرض آن x متر و طول و عرض حوض به ترتیب 50m و 25m می باشد مساحت پیاده رو را دریابید.

حل: مساحت مجموعی پیاده رو و حوض

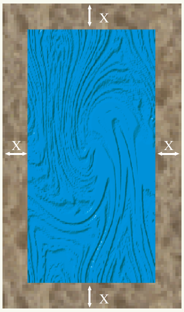
$$A = (25+2x)(50+2x) = 1250 + 150x + 4x^2$$

مساحت حوض:

$$(25\text{m})(50\text{m}) = 1250\text{m}^2$$

پس مساحت راه:

$1250 + 150x + 4x^2 - 1250 = 4x^2 + 150x$ می باشد.



در ضرب پولینوم ها میتوان مونوم را در مونوم، مونوم را در پولینوم و یا پولینوم را در پولینوم با هم ضرب کرد و در عملیهٔ ضرب خاصیت های تبدیلی، اتحادی و خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع نیز صدق می کند.

تمرین

1. ضرب کنید: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2 + 2y^2 - 2)$

2. ارتفاع یک بکس x انچ، طول آن $(x+1)$ انچ و عرض آن $2x-4$ انچ می باشد، اگر ارتفاع بکس 3 انچ باشد حجم این بکس مساوی است به:

a) $40\,\text{in}^3$ b) $24\,\text{in}^3$ c) $48\,\text{in}^3$ d) $20\,\text{in}^3$

تقسیم پولینوم بر مونوم

آیا حاصل تقسیم

$$\frac{4m^2}{\frac{n}{n}} \quad , \quad \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} \quad , \quad \frac{3mn^2}{-mn} \quad , \quad \frac{-x^2}{x}$$

و $\frac{-n^a}{n^b}$ و $\frac{14x^5}{2x^2}$ را به دست آورده

می توانید؟ (اگر تمام مخرج ها خلاف صفر باشند)؟

تقسیم مونوم بر مونوم(Dividing monomial by monomial):

مثال دوم: تقسیم کنید.

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3} = 3ab^4c^4 \quad , \quad \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2} = \frac{3}{2}x^3y \quad , \quad \frac{-a^2}{-a^x} = a^{2-x} \quad , \quad \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

تقسیم پولینوم بر مونوم:

$$(x^4 + 5x^3 - 7x^2) \div x^2$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7 \qquad (x^2 \neq 0)$$

مثال دوم: تقسیم کنید:

$$\frac{x^8y^2 - x^4y^6 - 4x^3y^9}{x^3y} = x^5y - xy^5 - 4y^8 \qquad (x^3y \neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2 - r^5s - 4r^3s^4}{r^2s} = r^4s - r^3 - 4rs^3 \qquad (r^2s \neq 0)$$

فعالیت

حاصل تقسیم را به دست آورید(مخرج ها خلاف صفر اند)

$$a: \frac{27x^6y^{13} - 18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b: \frac{x^2}{y^2-1} \div \frac{x^2}{y-1} \qquad c: \frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

تقسیم پولینوم بر پولینوم: وقتی که یک پولینوم را بالای پولینوم دیگر تقسیم می نماییم مقسوم(Dividend) و مقسوم علیه (Divisor) هر دو باید به طور منظم ترتیب شوند.

مثال سوم: حاصل تقسیم $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ را به دست آرید.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2} & 2x^2+7x+4 \\
\quad 7x^3-10x^2+13x & \\
\quad \underline{-7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x} & \\
\qquad 4x^2-8x+12 & \\
\qquad \underline{-4x^2 \mp 8x \pm 12} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

فعالیت

حاصل ضرب دو پولینوم $6y^3-11y^2+6y-1$ می باشد. اگر یک پولینوم $3y^2-4y+1$ باشد پولینوم دیگری را دریابید.

در تقسیم پولینوم می توانیم مونوم را بر مونوم، پولینوم را بر مونوم و یا پولینوم را بر پولینوم تقسیم کنیم طوری که مقسوم و مقسوم علیه به طور نزولی ترتیب گردد و عملیهٔ تقسیم تا وقتی ادامه داده می شود که درجهٔ باقیمانده به اندازهٔ یک از درجه مقسوم علیه کم باشد.

تمرین

1. به کدام قیمت P پولینوم $3x^3-7x^2-9x+p$ بر $x-13$ پوره تقسیم می شود؟

2. خارج قسمت ها را دریابید.

$$\frac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$$

$$\frac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$$

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$$

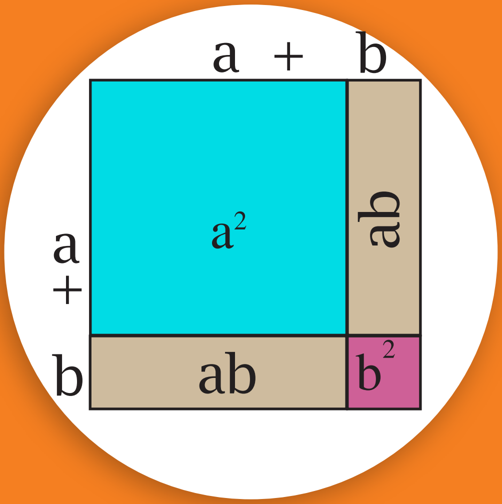
$$(x^2+x-6)\div(x-2)$$

$$(x^5-y^5)\div(x-y)$$

$$\frac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$$

مطابقت ها
(حاصل ضرب های خاص)

اگر $x+\frac{1}{x}=3$ باشد آیا قیمت $x^2+\frac{1}{x^2}$ را معلوم کرده می توانید؟



طوری که قبلاً مشاهده گردید توانستیم که حاصل ضرب دو یا اضافه تر از دو افاده الجبری را به دست آوریم.

توسط مطابقت ها، حاصل ضرب افاده های خاص را به آسانی به دست آورده می توانیم و نیز توسط مطابقت ها، افاده های الجبری را تجزیه کرده می توانیم.

-1

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

ثبوت:

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad +ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

مثال اول: $(2a+3b)^2$ را انکشاف دهید.

حل:

$$\begin{aligned}(2a+3b)^2 &= (2a)^2+2(2a)(3b)+(3b)^2 \\ &= 4a^2+12ab+9b^2\end{aligned}$$

فعالیت

$(4m+p)^2$ را انکشاف دهید.

مثال دوم: $(2x+3y)^2+(x+2y)^2$ را ساده کنید.

حل:

$$(2x+3y)^2+(x+2y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2+x^2+4xy+(4y)^2$$
$$=4x^2+12xy+9y^2+x^2+4xy+4y^2$$
$$=5x^2+16xy+13y^2$$

مثال سوم: اگر $a+b=5$ و $ab=6$ باشد قیمت a^2+b^2 را معلوم کنید.

حل:

$$a+b=5$$
$$(a+b)^2=5^2$$
$$a^2+2ab+b^2=25$$
$$a^2+2(6)+b^2=25$$
$$a^2+b^2=25-12$$
$$a^2+b^2=13$$

مثال چهارم: اگر $x+\frac{1}{x}=3$ باشد، قیمت $x^2+\frac{1}{x^2}$ را معلوم کنید.

حل:

$$x+\frac{1}{x}=3$$
$$(x+\frac{1}{x})^2=(3)^2$$
$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2=9$$
$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=9-2$$
$$x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

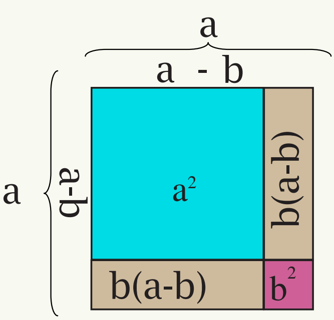
مثال پنجم: توسط مطابقت قمیت $(101)^2$ را معلوم کنید.

$$(101)^2=(100+1)^2=(100)^2+2(100)(1)+(1)^2$$
$$=10000+200+1=10201$$

-2

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$$

ثبوت:



$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

مثال اول: $(3x-4y)^2$ را انکشاف دهید.

حل:

$$(3x-4y)^2=(3x)^2-2(3x)(4y)+(4y)^2$$
$$=9x^2-24xy+16y^2$$

مثال دوم: $(2x-3y)^2+(7x-4y)^2$ را ساده کنید.

حل:

$$(2x-3y)^2+(7x-4y)^2$$
$$=(2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2+(7x)^2-2(7x)(4y)+(4y)^2$$
$$=4x^2-12xy+9y^2+49x^2-56xy+16y^2$$
$$=53x^2-68xy+25y^2$$

فعالیت

$(2a-5b)^2$ را انکشاف دهید.

مثال سوم: اگر $a-b=12$ و $ab=35$ باشد قیمت a^2+b^2 را معلوم کنید.

حل:

$$a-b=12$$
$$(a-b)^2=(12)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=144$$
$$a^2-2(35)+b^2=144$$
$$a^2+b^2=144+70=214$$

مثال چهارم: اگر $ab=10$ و $a^2+b^2=29$ باشد، قیمت $a-b$ را معلوم کنید.

حل:

$$\begin{aligned}(a-b)^2&=a^2-2ab+b^2\\&=a^2+b^2-2ab\\&=29-2(10)=9\end{aligned}$$
$$(a-b)^2=3^2$$
$$(a-b)=3$$

فعالیت

$(1-2x)^2$ را انکشاف دهید.

مثال پنجم: اگر $x-\frac{1}{x}=8$ باشد، قیمت $x^2+\frac{1}{x^2}$ را معلوم کنید.

حل:

$$x-\frac{1}{x}=8$$

$$(x-\frac{1}{x})^2=(8)^2$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2=64$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=64+2=66$$

مثال ششم: توسط مطابقت قمیت $(99)^2$ را معلوم کنید.

حل:

$$(99)^2=(100-1)^2=(100)^2-2(100)(1)+(1)^2$$
$$=10000-200+1=9801$$

مثال هفتم: $(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})^2$ را انکشاف دهید.

حل:

$$(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})^2=(\frac{x}{y})^2-2\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2$$
$$=\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}$$

تمرین

1 – انکشاف دهید:

$$(3x-\frac{1}{y})^2 \qquad (2a-3)^2 \qquad (2xy+3z)^2 \qquad (3a+1)^2$$

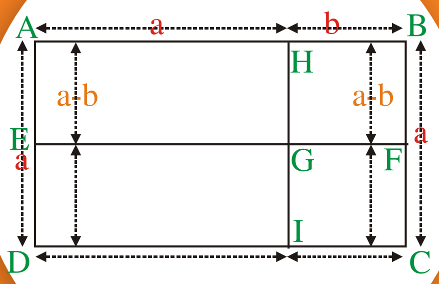
2 – توسط مطابقت قیمت های $(301)^2, (76)^2, (1005)^2, (998)^2, (97)^2$ را دریابید.

3 – اگر $xy = 24$ و $x - y = 2$ باشد، قیمت $x^2 + y^2$ را معلوم کنید.

4 – اگر $a + b = 7$ و $a^2 + b^2 = 29$ باشد قیمت ab را معلوم کنید.

3- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$$(2x+y)(2x-y)=?$$



ثبوت:

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{-ab-b^2} \\ a^2-b^2 \end{array}$$

مثال اول: $(3x+4y)(3x-4y)$ را ساده سازید.

حل:

$$(3x+4y)(3x-4y)=(3x)^2-(4y)^2=9x^2-16y^2$$

مثال دوم: توسط مطابقت حاصل ضرب 105×95 را معلوم کنید.

حل:

$$105\times95=(100+5)(100-5)=(100)^2-(5)^2=10000-25=9975$$

فعالیت

توسط مطابقت حاصل ضرب 97×103 را به دست آورید.

مثال سوم: اگر $a-b=6$ و $a^2-b^2=54$ باشد قیمت $a+b$ را دریابید.

حل:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$6(a+b)=54$$
$$a+b=\frac{54}{6}=9$$

4 -

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

یا در حالت خاص:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)+ab$$

$$\begin{array}{l} ax+b \\ \underline{cx+d\qquad\quad} \\ acx^2+bcx \\ \underline{\qquad +adx+bd\qquad} \\ acx^2+bcx+adx+bd \\ acx^2+(bc+ad)x+bd \\ acx^2+(ad+bc)x+bd \end{array}$$

مثال اول: توسط مطابقت حاصل ضرب $(2x+3)(3x+1)$ را معلوم کنید.

حل:

$$\begin{aligned}(2x+3)(3x+1)&=(2\times3)x^2+(2\times1+3\times3)x+3\times1\\ &=6x^2+11x+3\end{aligned}$$

مثال دوم: توسط مطابقت حاصل ضرب $(2a+3)(5a-1)$ را معلوم کنید.

حل:

$$(2a+3)(5a-1)=(2\times5)a^2+[(2)(-1)+(3)(5)]a+3(-1)$$
$$=10a^2+(-2+15)a-3$$
$$=10a^2+13a-3$$

فعالیت

توسط مطابقت حاصل ضرب $(4x-2b)(3x+b)$ را معلوم کنید.

مثال سوم: توسط مطابقت حاصل ضرب های زیر را دریابید:

a: $(\frac{x}{2}+y)(\frac{x}{2}-y)$

b: $(0.1x+0.2y)(0.1x-0.2y)$

حل:

a: $(\frac{x}{2}+y)(\frac{x}{2}-y)=(\frac{x}{2})^2-y^2=\frac{x^2}{4}-y^2$

b: $(0.1x+0.2y)(0.1x-0.2y)=(0.1x)^2-(0.2y)^2=0.01x^2-0.04y^2$

تمرین

1 - توسط مطابقت، حاصل ضرب های زیر را دریابید:

$(2x^2+3y^2)(2x^2-3y^2)$ $\quad$ $(x+2y)(x-2y)$

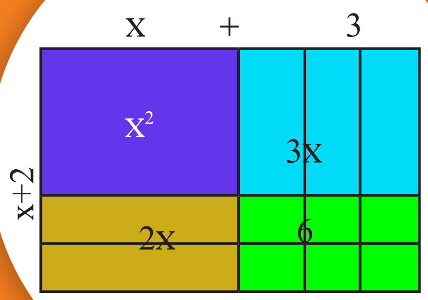
$(2x+1)(3x+1)$ $\quad$ $(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})$

$(9x^2+16y^2)(9x^2-16y^2)$ $\quad$ $(6x^2+5)(3x^2+2)$

2 - اگر $a+b=8$ و $a^2-b^2=6$ باشد، قیمت $a-b$ را معلوم کنید.

3 - اگر $x+y=5$ و $x^2-y^2=100$ باشد، قیمت $x-y$ را معلوم کنید.

تجزیه
factoring or factorization



آیا نشان داده می توانید که

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

می باشد؟

می دانیم که $15=3\cdot5$ می باشد که 3 و 5 اجزأی ضربی عدد 15 می باشند.

تجزیه افاده های الجبری

مثال اول:

$x^2=x\cdot x$، پس اجزأی ضربی x^2 عبارت از x و x می باشد. اجزأی ضربی 3xyz عبارت از 3,x,y و z می باشند.

$4x^2yz=2\cdot2\cdot x\cdot x\cdot y\cdot z$ که $2,2,x,x,y,z$ اجزای ضربی افادۀ $4x^2yz$ می باشد.

مثال دوم:

$$x^2+4x=x(x+4)$$

x و x+4 اجزأی ضربی x^2+4x می باشد.

مثال سوم:

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

پس: $x+2$ و $x+3$ عبارت از اجزأی ضربی افادۀ x^2+5x+6 می باشد.

1– تجزیه افاده های الجبری که به شکل $ka+kb+kc$ باشد.

$$ka+kb+kc=k(a+b+c)$$

همچنین:

$$ka-kb+kc=k(a-b+c)$$

$$ka+kb-kc=k(a+b-c)$$

مثال چهارم: افاده های زیر را تجزیه کنید.

$$6x+4y+8z=2(3x+2y+4z)$$

$$x^2+2x=x(x+2)$$

$$2x^2y+3xy=xy(2x+3)$$

مثال پنجم: $5a^2b^2+15ab^3+5b^4$ را تجزیه کنید.

حل:

$$5a^2b^2+15ab^3+5b^4=5b^2(a^2+3ab+b^2)$$

فعالیت

افاده های الجبری bm+am، x^2+3x و $4x^2y^2+3xy$ را تجزیه کنید.

2- تجزیه افاده های الجبری که شکل $a^2\pm 2ab+b^2$ را داشته باشند.

میدانیم که:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)$$

مثال اول: افاده a^2+2a+1 را تجزیه کنید.

حل:

$$a^2+2a+1=(a)^2+2(a)(1)+(1)^2=(a+1)^2$$
$$=(a+1)(a+1)$$

مثال دوم: افاده $4x^2+12xy+9y^2$ را تجزیه کنید.

حل:

$$4x^2+12xy+9y^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2=(2x+3y)^2$$
$$=(2x+3y)(2x+3y)$$

مثال سوم: افاده $16x^2-40xy+25y^2$ را تجزیه کنید.

حل:

$$16x^2-40xy+25y^2=(4x)^2-2(4x)(5y)+(5y)^2$$
$$=(4x-5y)^2=(4x-5y)(4x-5y)$$

مثال چهارم: افاده $9x^2+54xy+81y^2$ را تجزیه کنید.

حل:

$$9x^2+54xy+81y^2=(3x)^2+2(3x)(9y)+(9y)^2$$
$$=(3x+9y)^2=(3x+9y)(3x+9y)$$

مثال پنجم: $\frac{x^2}{y^2}+2+\frac{y^2}{x^2}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$\frac{x^2}{y^2}+2+\frac{y^2}{x^2}=(\frac{x}{y})^2+2\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2=(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2$$
$$=(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})$$

فعالیت

افاده $x^2+6xy+9y^2$ را تجزیه کنید.

تمرین

تجزیه کنید.

$6x^3+5x^2+2x$

$10x^3y+15x^2y^2+25xy^3$

$9x^2+24xy+16y^2$

$3x^2+6$

$9x^2-48xy+64y^2$

$4x^2-2+\frac{1}{4x^2}$

$a^2x^2-6abxy+9b^2y^2$

$\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}$

۳- تجزیه افاده های الجبری که شکل a^2-b^2 را داشته با شند.

$$81m^2-36n^2=$$
$$(9x-6n)(9x+6n)$$

آیا افاده $9y^2-100$ را تجزیه کرده می توانید؟

چون می دانیم که $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

مثال اول: افاده $9x^2-16y^2$ را تجزیه کنید.

حل:

$$9x^2-16y^2=(3x)^2-(4y)^2=(3x-4y)(3x+4y)$$

مثال دوم: افاده $x^2-\frac{1}{x^2}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$x^2-\frac{1}{x^2}=(x)^2-(\frac{1}{x})^2=(x-\frac{1}{x})(x+\frac{1}{x})$$

مثال سوم: افاده a^4-b^4 را تجزیه کنید.

حل:

$$a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

فعالیت

افاده $9x^2-64$ را تجزیه کنید.

۴- تجزیه افاده های که شکل ax^2+bx+c را داشته باشد.

مثال اول: افاده x^2+5x+6 را تجزیه کنید.

حل:

$$x^2+5x+6=x^2+3x+2x+6=x(x+3)+2(x+3)$$
$$=(x+2)(x+3)$$

مثال دوم: افادهٔ x^2-5x+6 را تجزیه کنید.

حل:

$$x^2-5x+6=x^2-3x-2x+6=x(x-3)+2(x-3)$$
$$=(x-2)(x-3)$$

مثال سوم: افادهٔ $x^2+7x+10$ را تجزیه کنید.

حل:

$$x^2+7x+10=x^2+2x+5x+10=x(x+2)+5(x+2)$$
$$=(x+2)(x+5)$$

فعالیت

افاده $x^2+2x-15$ را تجزیه کنید.

مثال چهارم: افادهٔ $2x^2+11x+14$ را تجزیه کنید.

حل:

$$2x^2+11x+14=2x^2+4x+7x+14=2x(x+2)+7(x+2)$$
$$=(2x+7)(x+2)$$

مثال پنجم: افادهٔ $12x^2+7x-10$ را تجزیه کنید.

حل:

$$(15)(-8)=120$$
$$15-8=7$$
$$12x^2+7x-10=12x^2+15x-8x-10=3x(4x+5)-2(4x+5)$$
$$=(3x-2)(4x+5)$$

مثال ششم: افاده $6x^2-4x-2$ را تجزیه کنید.

حل:

$$6x^2-4x-2=6x^2-6x+2x-2$$
$$=6x(x-1)+2(x-1)=(6x+2)(x-1)$$

تمرين

1- تجزيه کنید.

$81a^2-25b^2$ $\qquad$ x^2-25 $\qquad$ x^2-y^2

x^8-y^8 $\qquad$ $1-16y^4$ $\qquad$ $18x^2-50y^2$

2- تجزيه کنید.

$x^2+9x+20$ $\qquad$ x^2+4x+3

$y^2+15y+56$ $\qquad$ $x^2+15x+54$

$x^2-3x-180$ $\qquad$ $b^2-7b+12$

$8x^2+2x-3$ $\qquad$ $3x^2+14x-5$

$3y^2-y-10$ $\qquad$ $3a^2-a-4$

خلاصهٔ فصل

• افادهٔ الجبری به سه نوع میباشد، افادهٔ الجبری ناطق، افادهٔ الجبری غیر ناطق و افاده الجبری پولینومی.

• حدودی که متحولین و درجه های شان عین چیز باشند حدود مشابه (Like terms) نامیده می شوند. مثل $3x^2$ و $5x^2$ یا $4x^2y^2$ و $-6x^2y^2$ حدود مشابه اند.

• پولینوم عبارت از افادهٔ الجبری یک یا چند حده می باشد که توان های حروف شان در ست اعداد مکمل شامل باشند.

• درجهٔ یک پولینومی که از یک حرف (متحول) تشکیل شده باشد عبارت از بزرگترین توان این حرف می باشد و اگر پولینوم از چند حرف تشکیل شده باشد درجهٔ مونومی که بزرگترین توان را داراست عبارت از درجهٔ پولینوم می باشد.

• به فکتور عددی (Numerical Factor) یک حد، ضریب می گویند؛ طور مثال: در $3x^2$ عدد 3 ضریب x^2 می باشد.

• تمام اعداد ثابت پولینوم ها اند که به نام پولینوم های ثابت یاد می شوند، که درجهٔ پولینوم های ثابت صفر است، اما درجهٔ پولینوم صفری تعریف ناشده است.

• پولینوم هایی که دارای یک متحول باشد و ضرایب حدود مشابه آن ها با هم مساوی باشند، به نام پولینوم های معادل یا د می شوند.

• قیمت یک پولینوم عددی است، که در نتیجهٔ وضع کردن قیمت داده شده متحول در پولینوم به دست می آید.

• اگر یک پولینوم از بزرگترین توان متحول تا عدد ثابت تمام حدود را داشته باشد به نام پولینوم مکمل و اگر یک یا چند حد نداشته باشد به نام پولینوم ناقص یاد می شود.

• اگر یک پولینوم از کوچکترین توان متحول تا بزرگترین توان متحول ترتیب شود، پولینوم منظم صعودی و اگر از بزرگترین توان متحول تا کوچکترین توان ترتیب شود به نام پولینوم منظم نزولی یاد می شود.

• در عملیهٔ جمع پولینوم ها، حدود مشابه (Like terms) با هم جمع و در عملیهٔ تفریق علامهٔ مفروق تغییر می کند و متباقی مراحل مثل عملیهٔ جمع، انجام می شود. (معکوس

جمعی مفروق با مفروق منه جمع می شود).

• در عملیه های جمع و ضرب پولینوم ها خاصیت های تبدیلی و اتحادی و نیز خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع صدق می کند.

• در عملیهٔ ضرب پولینوم ها می توانیم مونوم را در مونوم، مونوم را در پولینوم و یا پولینوم را در پولینوم ضرب کنیم.

• به همین ترتیب در عملیهٔ تقسیم پولینوم ها، میتوانیم مونوم را بر مونوم، پولینوم را بر مونوم و یا پولینوم را بر پولینوم تقسیم نماییم.

•

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

•

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

•

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

•

$$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

تمرین فصل

1 - اگر $k=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ و $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ باشد $Kb+La$ را دریابید.

2 - به کدام قیمت x پولینوم $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ بالای $(3x^2-1)$ پوره قابل تقسیم می باشد؟

3 - به کدام قیمت P پولینوم $K(x)=3x^3-7x^2-9x+P$ بالای $(x-13)$ پوره قابل تقسیم می باشد؟

4 - اگر $x=4$, $y=-3$ و $z=2$ باشد، قیمت افاده های الجبری زیر را دریابید.

$a: x^2yz+zxy^2+3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}Z^2$

5 - اگر $P(x)=0$ باشد درجهٔ پولینوم $P(x)$ چند است؟

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) صفر $\qquad$ d) تعریف ناشده است

6 - از مساحت مستطیلی که ابعاد آن $(x+5)$ و $(x+2)$ می باشد مساحت مستطیل را تفریق کنید که ابعاد آن $(x+3)$ و $(x+1)$ باشند.

7 - اگر $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ و $a=13$, $b=5$, $c=12$ و $p=\frac{a+b+c}{2}$ باشد قیمت A را دریابید.

8 - اگر $(x-1)^3$ و x^3+ax^2+bx+c پولینوم های معادل باشند قیمت b مساوی است به:

a) 1 $\qquad$ b) 3 $\qquad$ c) -3 $\qquad$ d) -1

9 - حاصل افادهٔ $(a-\frac{2}{a-1})\ (a\div\frac{a+1}{a-1})$ مساوی است به:

a) $a(a+1)$ $\qquad$ b) $a(a-2)$ $\qquad$ c) $\frac{a-2}{a}$ $\qquad$ d) $\frac{a-1}{a}$

10 - حاصل ضرب $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ مساوی است به:

a) x^2-y^2 $\qquad$ b) x^2+y^2 $\qquad$ c) $2x^2-y$ $\qquad$ d) $x-y$

11 - پولینوم های زیر را به طور نزولی (Descending Order) ترتیب و نیز درجه های آنها را معلوم کنید:

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

12 - در پولینوم $Q(x)=x^2+3x-5$ قیمت $Q(-1)$ مساوی است به:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

13 - اگر $P(x)=x^2-2x+3$ و $Q(x)=2x^2+3x-1$ باشد قیمت افاده های زیر را دریابید:

$P(1)-Q(-1)$ $P(0)+Q(0)$ $P(x)-Q(x)$

$[P(x)+Q(x)]+p(x)$ $P(x)-P(x)$

14 - پولینوم های زیر را نظر به y به طور نزولی ترتیب نمایید.

$4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$ $4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$

15 - در افاده های الجبری زیر، پولینوم ها، افاده های ناطق و غیرناطق الجبری را نشان دهید.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

16 - حاصل افادهٔ $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ مساوی است به:

$a)$ 1 $b)$ صفر $c)$ -1 $d)$ 2

17 - حاصل ضرب دو افادهٔ الجبری $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ می باشد. اگر یک افادهٔ الجبری $(a+b+c)$ باشد افادهٔ دیگری را معلوم کنید.

18 - خارج قسمت ها را دریابید.

$(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$ $(a^3+b^3)\div(a+b)$

$(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$ $(a^5-b^5)\div(a-b)$

$\dfrac{x^{a-2}}{x}$ $\dfrac{-m^a}{m^b}$

19 – ضرب کنید.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

20 – افاده های زیر را ساده و جمع کنید.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

21 – تجزیه کنید.

x^2-x-12 , a^2+9a+8 , $x^2+5x-24$

$9y^2-81$, a^2-36 , $a^2c^2-16c^2d^2$

$12a^3-8a^2+4a$, $13n-26n^3+39n^5$

22 – اگر $a^2-b^2=4$ و $a-b=8$ باشد قیمت a+b را معلوم کنید.

23 – توسط مطابقت ها قیمت های $(95)^2,(105)^2,(99)^2,(104\times96),(34\times26)$ را معلوم کنید.

24 – انکشاف دهید.

$(2x+5)^2$

$(3a-8)^2$

$(7a-5)^2$