



ریاضی

صنف ۸

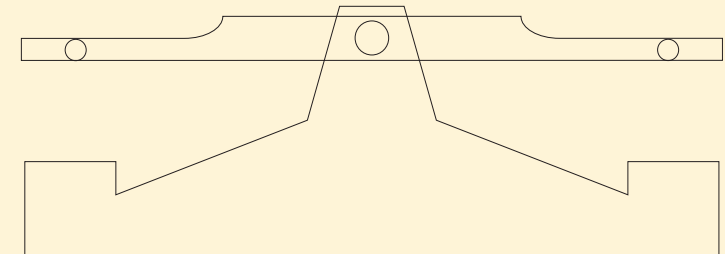
$$\frac{3}{4} = \frac{?}{8}$$

صنف ۸

$$x+2=5$$

$$x=?$$

x



کتاب درسی مربوط وزارت معارف بوده، خرید و فروش آن ممنوع است.

curriculum@moe.gov.af

ریاضی
صنف
۸

۱۳۹۸

ه.ش

مولفان:

- سرمؤلف نظام الدین عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- معاون مؤلف محمد خالد ستوری (خُدران) عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- مهریه ناصر عضو تیم پروژه تألیف کتب درسی وزارت معارف

ادیتوران علمی:

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ادیتوران زبان:

- عبدالرزاق کوهستانی عضو علمی دیپارتمنت زبان و ادبیات دری
- نرگس صالحی عضو علمی دیپارتمنت زبان و ادبیات دری

کمیته دینی، سیاسی و فرهنگی:

- محمد آصف کوچی متخصص علوم اسلامی
- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

إشراف:

- دکتور شیر علی ظریفی رئیس پروژه انکشاف نصاب تعلیمی.



سرود ملی



دا وطن افغانستان دی	دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې	هر بچي يې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی	د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو	د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي	پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي	هم ایماق، هم پشه بان
دا هیواد به تل ځلېږي	لکه لمر پر شنه اسمان
په سینه کې د اسیا به	لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مودی رهبر	وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

پیام وزیر معارف

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبيه ورسوله محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين، أما بعد:

نصاب تعلیمی معارف اساس نظام تعلیم و تربیه را تشکیل داده و در رشد و توسعه علمی، فکری و سلوکی نسلهای امروز و فردای کشور نقش بنیادی و سرنوشت ساز دارد.

نصاب تعلیمی با گذشت زمان و تحول و پیشرفت در عرصه های مختلف زندگی، مطابق با نیازهای جامعه، باید هم از نظر مضمون و محتوا و هم از نظر شیوه و روش عرضه معلومات، تطور و انکشاف نماید.

یکی از عرصه های نصاب تعلیمی که مورد توجه جدی برای تجدید نظر و بهبود می باشد، نصاب تعلیمات اسلامی است؛ زیرا از یک جانب، فارغان مدارس دینی به حیث پیشوایان معنوی جامعه، باید محور تلاشهای معارف قرار گیرند و از سوی دیگر نصاب تعلیمات اسلامی شامل عقاید، احکام و هدایات دین مبین اسلام است که به حیث نظام و قانون مکمل، تمام ابعاد زندگی انسان ها را در بر گرفته و به عنوان آخرین پیام خالق و پروردگار جهان تا روز قیامت، رسالت رهنمایی و هدایت بشریت را انجام می دهد.

علمای امت اسلامی در طول تاریخ نقش مهمی را در ایجاد، توسعه و غنای سیستم تعلیمات و معارف اسلامی مخصوصاً انکشاف تدریجی نصاب تعلیمی مراکز و مؤسسات علمی جهان اسلام، ایفاء کرده اند.

مطالعه دقیق در سیر تطور تاریخی علوم و معارف اسلامی در جهان نشان می دهد که نصاب تعلیمی مدارس و مراکز علمی ما، همواره بنا بر ضرورت های جامعه و در تطابق با احکام ثابت و پا بر جای دین اسلام، که برای همه انسانها در همه زمانها و مکانها می باشد، توسعه یافته است.

کشور عزیز ما افغانستان با سابقه درخشان علمی، روزگاری مهد علم و دانش و جایگاه بزرگترین مراکز علمی عصر بوده و در شکل گیری تمدن بزرگ اسلامی نقش عظیمی داشته است، وجود هزاران دانشمند و عالم در عرصه های مختلف علم و فرهنگ مخصوصاً در علوم شرعی مانند عقاید، تفسیر، حدیث، فقه، اصول فقه و غیره، گواه واضح آنچه گفته شد می باشد.

همزمان با رشد بیداری اسلامی در عصر حاضر، تعلیمات اسلامی در کشور ما شاهد تحول کمی و کیفی بوده و اطفال و جوانان کشور ما با شوق و رغبت فراوان به طرف مدارس و مراکز تعلیمات اسلامی رو می آورند.

وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان بر اساس مسؤولیت و رسالت خویش، در مطابقت با احکام قانون اساسی کشور، به منظور رشد و توسعه کمی و کیفی تعلیمات اسلامی و از جمله نصاب آن، اقدامات قابل توجه نموده است.

درین راستا وزارت معارف با دعوت از علماء، استادان و متخصصین باتجربه و قابل اعتماد کشور، به بهبود و انکشاف نصاب تعلیمی پرداخته و کتابهای رایج مدارس تعلیمات اسلامی، را با شرح و توضیح متون، جا بجا ساختن فعالیتها، ارزیابی و تمرینها با معیارهای کتب درسی عیار ساخت. امیدوارم این تلاشهای قابل تمجید علماء و متخصصان وزارت معارف، در بهبود و انکشاف هر چه بیشتر تعلیمات اسلامی در افغانستان عزیز مفید واقع شده و سبب کسب رضای خداوند متعال قرار گیرد.

وبالله التوفیق

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

مقدمه

استادان عالیقدر و شاگردان گرامی،

ریاضی زبان علوم طبیعی است که قوانین طبیعت را فورمول بندی می کند و مسائل مربوط به اعداد و مقادیر را به زبان حساب ارایه می نماید.

انسان ها در زنده گی روز مره به علم ریاضی احتیاج دارند، این علم برای ساینس حیثیت کلید را دارد که اکثر قوانین طبیعت به زبان ریاضی بیان می شود و در مسائل شرعی نیز به علم ریاضی ضرورت می باشد، در تقسیم میراث، تقسیم زمین و دریافت مساحت آن، تعیین حقوق شرکاء، تعیین زکات و غیره موارد، از علم ریاضی استفاده صورت می گیرد.

برای اینکه فارغان مدارس علوم شرعی قابلیت های ضروری داشته باشند، مسائل روزمره زنده گی مربوط ریاضی را حل کرده بتوانند و مسائل مانند میراث، مشارکت، تقسیمات اموال و محتوای مضامین ساینسی را بفهمند، ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان مسائل ضروری ریاضی را در نصاب تعلیمی مدارس جابه جا نمود.

به گونه که ضرورت های اساسی شاگردان مدارس شرعی، تخصص آینده ایشان و ساعات تعیین شده در پلان تعلیمی برای مضمون ریاضی را در نظر گرفته و مسایل ضروری این علم را با در نظر داشت به فن معاصر نصاب نویسی بر میتود آسان و مؤثر تالیف نمود، تا فارغان مدارس شرعی در پهلوی علوم دینی بعضی علوم ضروری دنیوی را نیز فرا گیرند، ظرفیت های شان بلند برود و رول مؤثر و مثمر را در جامعه بازی نمایند.

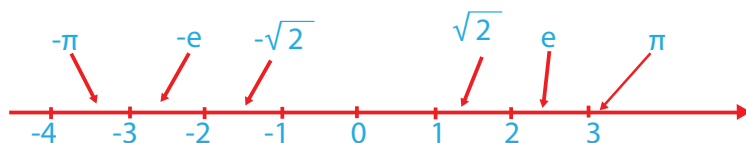
والله ولی التوفیق

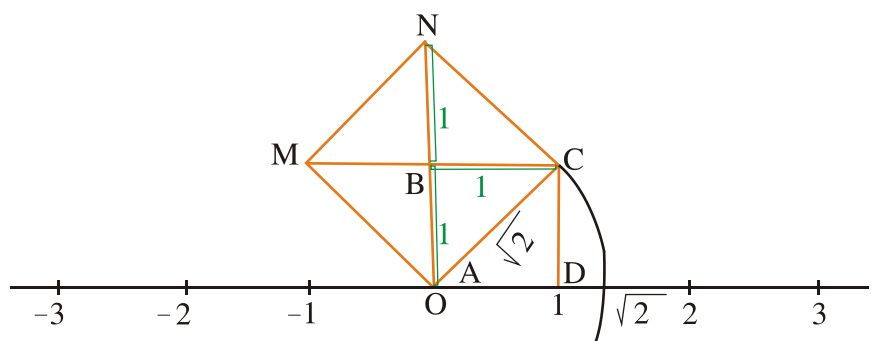
صفحه	عنوان
۱	فصل اول (اعداد حقیقی)
۳	مفهوم اعداد حقیقی و خواص آن
۱۱	طریقهٔ عمومی استخراج جذر مربع تقریبی، اوسط و دریافت جذر اعداد اعشاری دار
۱۹	عملیات بالای اعداد جذر دار (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)
۲۳	قوانین اعداد توان دار (ضرب، تقسیم، توان صفر و منفی)
۲۹	طاقت نماهای کسری و قوانین آن، ناطق کردن کسر ها
۳۳	نکات مهم فصل
۳۴	تمرینات عمومی
۳۷	فصل دوم (محاسبات مالی)
۳۹	نسبت، تقسیم به اجزای متناسب
۴۳	تناسب، خواص تناسب، انواع تناسب
۵۳	فیصد، احدیت، زکات و تخفیف
۶۳	نکات مهم فصل
۶۵	تمرینات عمومی
۶۷	فصل سوم (مشابهت)
۶۹	اشکال متشابه، مضلعات متشابه
۷۳	قضیهٔ خطوط موازی با فاصله های مساوی، قضیهٔ تالس
۷۷	نکات مهم فصل
۷۸	تمرینات عمومی
۷۹	فصل چهارم (تناظر)
۸۱	مفهوم تناظر، تناظر محوری، تناظر مرکزی
۸۷	نکات مهم فصل
۸۸	تمرینات عمومی
۸۹	فصل پنجم (قضایای مثلث)
۹۱	قضایای مثلث متساوی الساقین

صفحه	عنوان
۹۳	قضیه فیثاغورث
۹۷	ناصف الزاویه، ناصف الزاویه های داخلی مثلث، ناصف عمودی در یک مثلث
۱۰۷	ارتفاع های مثلث، میانه های مثلث
۱۰۹	نکات مهم فصل
۱۱۰	تمرینات عمومی
۱۱۱	فصل ششم (افاده های الجبری)
۱۱۳	مفهوم متحول، افاده های الجبری، ساده کردن افاده های الجبری
۱۱۹	ضرب یک حده ها، تقسیم افاده های یک حده، ضرب افاده های الجبری
۱۲۵	مطابقت ها
۱۲۷	نکات مهم فصل
۱۲۹	تمرینات عمومی
۱۳۱	فصل هفتم (معادلات)
	مفهوم معادله، عملیه های جمع و تفریق در مساوات، عملیه های ضرب و تقسیم در مساوات
۱۳۳	
۱۳۹	معادله عمومی درجه یک یک مجهوله
۱۴۱	نکات مهم فصل
۱۴۲	تمرینات عمومی
۱۴۳	فصل هشتم (سیستم کمیات وضعیه قایم)
۱۴۵	نقطه در مستوی، مختصات یک نقطه در مستوی، مجهول و متحول
۱۵۱	نکات مهم فصل و تمرینات عمومی

فصل اوّل

اعداد حقيقي



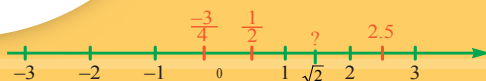


مفهوم اعداد حقیقی



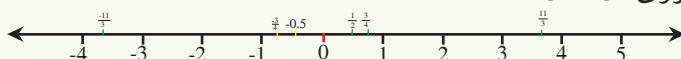
می دانیم که تمام اعداد نسبتی را می توانید روی محور اعداد نمایش دهید در شکل زیر روی محور اعداد بعضی از اعداد نسبتی نمایش داده شده اند.

آیا می توان عددی را مانند $\sqrt{2}$ نیز روی محور اعداد نمایش داد؟



آیا اعداد ناطق را می شناسید؟

از مطالب ریاضی صنف هفتم با در نظر داشت محور اعداد گفته می توانیم که هر عدد ناطق (نسبتی) را روی محور اعداد توسط یک نقطه نشان می دهیم، مانند: شکل زیر که بعضی از اعداد نسبتی روی آن نشان داده شده اند:



اعداد دیگری نیز وجود دارند که تا به حال روی محور اعداد نشان داده نشده اند. یا به عبارت دیگر اعداد نسبتی به تنهایی نمی توانند تمام نقاط روی محور اعداد را بپوشانند؛ یعنی بین اعداد نسبتی روی محور اعداد، جا های خالی برای اعدادی که نسبتی یا ناطق نباشند وجود دارند که توسط همین اعداد پر می شوند.

فعالیت

• جذر مربع اعداد زیر را پیدا کنید:

عدد	25	16	2	100	4	$\frac{9}{4}$
جذر مربع	10					

• در فعالیت فوق پیدا کردن جذر مربع، کدام عدد برای شما مشکل است؟

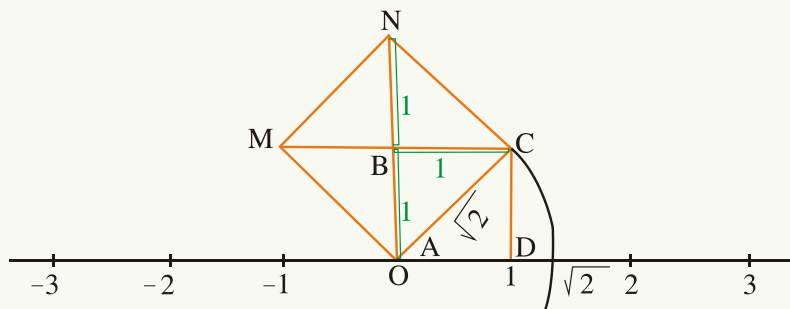
- آیا می توانید یک عدد ناطق را پیدا کنید که در خودش ضرب شود و حاصل ضرب آن عدد 2 شود؟
- جدول زیر را تکمیل کنید:

عدد	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
مربع عدد	1					2.25

- جذر المربع عدد 2 بین کدام دو عدد قرار دارد؟
- به منظور دقت بیشتر در پیدا کردن جذر مربع عدد 2 جدول زیر را تکمیل نمایید:

عدد	1.40	1.41	1.42	1.43
مربع عدد		1.981		

با ملاحظه جدول فوق نشان دهید که جذر مربع عدد 2، بین کدام دو عدد قرار دارد؟ اعداد سطر اول اعدادی هستند که امکان موجودیت جذر مربع عدد 2 بین آن‌ها وجود دارد. به هر اندازه‌ی که در سطر اول جدول اعداد با هم نزدیکتر انتخاب گردند، باز هم دیده می‌شود که در سطر دوم جدول عدد 2 ظاهر نمی‌شود. یعنی عدد ناطقی که مساوی به $\sqrt{2}$ باشد پیدا کرده نمی‌توانیم؛ پس ست جدید اعداد را دریافت کردیم که عبارت از ست اعداد غیر ناطق (گنگ) است. ست اعداد غیر ناطق را به Q' نشان می‌دهیم. مانند $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ و $\sqrt{2}$ با وجود این که $\sqrt{2}$ عدد ناطق نمی‌باشد، با استفاده از نمایش هندسی می‌توان آن را روی محور اعداد طور زیر مشخص نمود:



در شکل می بینیم مربع کوچکی ABCD را که طول اضلاع آن یک واحد است به دو مثلث قائم الزاویه تقسیم شده و دارای مساحت یک واحد مربع می باشد. و مربع بزرگتر AMNC که در شکل آن را مشاهده می کنید نظر به مربع کوچک OBCE دارای مساحت بیشتر است که مساحت آن 2 واحد مربع است، بنابر این از دریافت فورمول مساحت مربع می دانیم که هر ضلع مربع بزرگ مساوی به $\sqrt{2}$ واحد می باشد.

هرگاه نقطه O را مرکز قرارداده به شعاع $\sqrt{2}$ که یک ضلع مربع بزرگ می باشد یک قوس طوری رسم نماییم، که محور اعداد را در یک نقطه قطع کند، نقطه تقاطع با محور اعداد، موقعیت $\sqrt{2}$ را مشخص می کند.

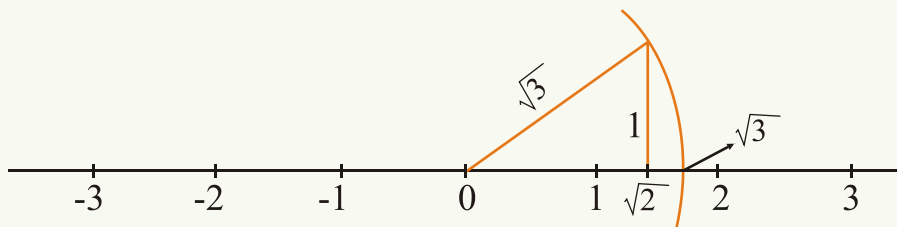
همانطوری که اعداد ناطق دارای معکوس جمعی می باشند، اعداد غیر ناطق نیز معکوس جمعی دارند؛ مثلاً: معکوس جمعی $\sqrt{2}$ ، $-\sqrt{2}$ است که به طرف سمت چپ صفر روی محور اعداد نشان داده شده است. هر نقطه محور اعداد به یک عدد حقیقی و معکوساً هر عدد حقیقی به یک نقطه محور اعداد مطابقت می کند.



تعریف

اتحاد ست های اعداد ناطق و غیر ناطق را به نام ست اعداد حقیقی یاد می کنند. ست اعداد حقیقی را به IR نشان می دهند. $IR = Q \cup Q'$
مثال: $\sqrt{3}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

حل: از نقطه $\sqrt{2}$ به اندازه یک واحد به سمت بالا حرکت می نماییم. نقطه به دست آمده را به O وصل می نماییم، نقطه O را مرکز گرفته یک قوس رسم می کنیم که محور اعداد را در یک نقطه قطع کند. نقطه به دست آمده موقعیت $\sqrt{3}$ را بالای محور اعداد مشخص می کند.



تمرین

1- کدام یک از اعداد زیر غیر ناطق اند:

- a) $\sqrt{16}$, b) $-\sqrt{5}$, c) $\frac{2}{3}$, d) $\sqrt{37}$

2- سه عدد ناطق و سه عدد غیر ناطق را بنویسید.

3- در باره $\sqrt{15}$ چی فکر می کنید، عدد ناطق است یا غیر ناطق؟

4- موقعیت $\sqrt{5}$ و $1+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد مشخص کنید.

5- کدام یک از اعداد $3+\sqrt{4}$, $8+2\sqrt{2}$, $3+\sqrt{4}$ و $3+\sqrt{4}$ ناطق و کدام آن ها غیر ناطق است؟

6- در مورد اعداد $\sqrt{144}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{36}$ چه فکر می کنید؟ ناطق اند و یا غیر ناطق؟

خواص اعداد حقیقی

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \times (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) + (\sqrt{2} \times \sqrt{5})$$

$$\sqrt{2} + (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}$$



آیا خاصیت های تبدیلی، اتحادی و توزیعی در اعداد حقیقی صدق می کنند؟

فعالیت

• قیمت های تقریبی جذور زیر را با استفاده از جدول در یافت کنید:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = ? \quad \sqrt{3} + \sqrt{2} = ?$$

$$\sqrt{2} + 2 = ? \quad 2 + \sqrt{2} = ?$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{1} = ? \quad \sqrt{1} + \sqrt{3} = ?$$

$$\sqrt{3} + 1 = ? \quad 1 + \sqrt{3} = ?$$

عدد	قیمت تقریبی
$\sqrt{2}$	1.41
$\sqrt{3}$	1.73
$\sqrt{5}$	2.23

• آیا خاصیت تبدیلی در ست اعداد حقیقی صدق می کند یا خیر؟

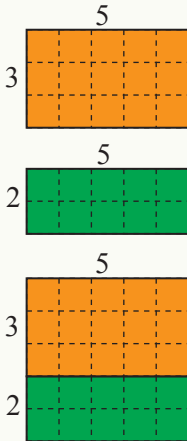
• در اعداد طبیعی این خاصیت به نام چه یاد می شود؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم که:

برای هر عدد حقیقی a و b $a + b = b + a$ می باشد.

سؤال: آیا خاصیت تبدیلی عملیه ضرب در اعداد حقیقی نیز صدق می کند؟
با چند مثال واضح سازید.

فعالیت



- یک مستطیل به طول 5 واحد و عرض 3 واحد طول رسم نمایید. مساحت این مستطیل چند است؟
- مستطیل دیگر را رسم نموده که طول آن 5 و عرض آن 2 واحد باشد مساحت این مستطیل چقدر است؟
- این دو مستطیل را کنار هم قرار داده و بگویید مساحت مستطیل بزرگ مساوی به چند است؟
- مساحت مستطیل بزرگ چه رابطه با مجموع مساحت های دو مستطیل کوچک دارد؟

$$5(3+2)=(5 \cdot 3)+(5 \cdot 2)$$

از نتیجه فعالیت فوق برای هر عدد حقیقی a, b, c داریم:

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$$

این خاصیت به نام چه یاد می شود؟

این خاصیت به نام خاصیت توزیعی ضرب بالای عملیۀ جمع یاد می گردد.

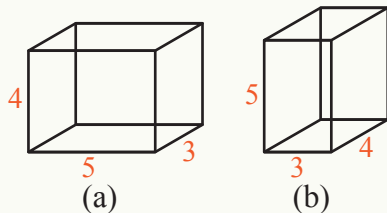
مثال: افاده $\sqrt{3} \times (\sqrt{2} + \sqrt{5})$ را در نظر گرفته خاصیت توزیعی اعداد حقیقی را بالای آن تطبیق کنید.

$$\sqrt{3} \times (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = (\sqrt{3} \times \sqrt{2}) + (\sqrt{3} \times \sqrt{5})$$

حل:

فعالیت

اشکال مقابل را در نظر بگیرید.



- حجم مکعب مستطیل شکل a مساوی به چند است؟
- حجم مکعب مستطیل شکل b مساوی به چند است؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم:

شما به یاد دارید که:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

روابط فوق برای هر a از ست اعداد حقیقی نیز صدق می کند.

برای هر عدد حقیقی a، b و c داریم که:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

این خاصیت اتحادی در عملیه ضرب است.

مثال: با استفاده از خاصیت اعداد حقیقی، افاده $\sqrt{2} \times (\sqrt{3} \times \sqrt{5})$ را در نظر گرفته خاصیت اتحادی را بالای آن تطبیق کنید.

حل:

$$\sqrt{2} \times (\sqrt{3} \times \sqrt{5}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times \sqrt{5}$$

آیا خاصیت اتحادی تحت عملیه جمع وجود دارد؟ با چند مثال واضح سازید.

از این به بعد علامت ضرب (x) را به علامت (.) نشان می دهیم.

تمرین

مساوات زیر را در نظر گرفته خاصیت های مربوطه را در مقابل آن بنویسید.

a - $\sqrt{5}(2+3) = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ (نظر به کدام خاصیت.....)

b - $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ (نظر به کدام خاصیت.....)

c - $\sqrt{3} \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) = (\sqrt{3} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{3}$ (نظر به کدام خاصیت.....)

d - $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$ (نظر به کدام خاصیت.....)

e - $\sqrt{3} + (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3} + \sqrt{5}) + \sqrt{2}$ (نظر به کدام خاصیت.....)

طریقه عمومی استخراج جذر مربع تقریبی یک عدد

$$\sqrt{125} = ?$$

$$\sqrt[3]{8} = ?$$

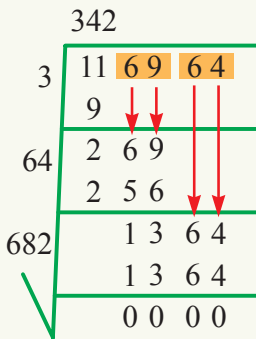
- جذر اعداد را به طریقه تجزیه می دانید.
- آیا می توان جذر مربع تمام اعداد را به طریقه تجزیه دریافت کرد؟
- آیا جذر سوم یک عدد را به جز از طریقه تجزیه به کدام طریقه دیگر دریافت کرده می توانید؟

- آیا دریافت جذر مربع اعداد را به طریقه تجزیه میدانید؛ مثلاً: $\sqrt{25}$ چند است؟
- جذر سوم، اعداد را به کدام طریقه دریافت کرده می توانید؛ مثلاً: $\sqrt[3]{27}$ چند است؟
- آیا برای پیدا کردن جذر مربع به جز از طریقه تجزیه کدام طریقه دیگر وجود دارد؟
- در صنف گذشته دریافت جذر مربع اعداد مثبت را به شکل عمومی آموختید؛ به منظور یادآوری مثال های زیر را در نظر می گیریم:

مثال 1: جذر مربع عدد 625 را دریافت می کنیم.
حل: عدد را تحت علامت جذر می نویسیم.

$$\begin{array}{r} 25 \\ 2 \overline{) 625} \\ \underline{4} \\ 225 \\ 2 \overline{) 225} \\ \underline{225} \\ 000 \end{array}$$

مثال 2: جذر مربع عدد 116964 را دریافت می کنیم.
حل: عدد فوق را تحت علامت جذر می نویسیم.



$$\sqrt{116964} = 342 \text{ در نتیجه:}$$

مراحل استخراج جذر دوم را توضیح دهید.

سؤال: جذر مربع اعداد زیر را دریافت کنید:

a) 1024 b) 5329 c) 1127

در جزء c دیدیم که 1127 جذر مربع تام ندارد.

آیا جذر تقریبی اعداد را به شکل عمومی محاسبه کرده می توانید؟
 برای محاسبه یک عدد جذر تقریبی یک عدد از روش عمومی کار گرفته، برای اینکه بتوانیم جذر تقریبی یک عدد را به دست آوریم فعالیت زیر را انجام می دهیم:

فعالیت

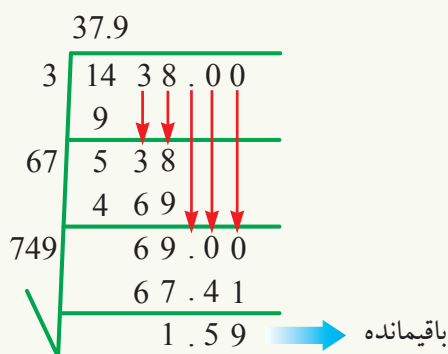
عدد	1.2	2.03	0.3	1.23	1.360
مربع عدد	1.44	4.1209			

• با در نظر داشت جدول فوق، چه رابطه یی بین تعداد ارقام اعشاری عدد و مربع آن وجود دارد؟

• با داشتن تعداد ارقام اعشاری جذر مربع، چگونه می‌توانیم تعداد ارقام اعشاری عدد را دریافت کنیم؟

همان طوریکه در فعالیت بالا تعداد ارقام اعشاری جذر مربع، نصف تعداد رقم‌های اعشاری مربع آن است از این قاعده برای استخراج جذر تقریبی استفاده می‌کنیم.

مثال 1: می‌خواهیم جذر مربع عدد 1438 را تا یک رقم اعشاری محاسبه کنیم.



در نتیجه: $\sqrt{1438} \approx 37.9$

سؤال: آیا $1438.00 = 1438$ است؟ چرا 1438 را به شکل 1438.00 می‌نویسیم؟

مثال 2: جذر مربع تقریبی عدد 2417 را تا دو رقم اعشاری محاسبه کنید.



در نتیجه: $\sqrt{2417} \approx 49.16$

در مثال‌های فوق می‌بینیم که تعداد ارقام اعشاری باقیمانده مساوی به تعداد ارقام اصلی عددی است که می‌خواهیم جذر مربع آن را پیدا کنیم.

تمرین

1- جذر مربع اعداد زیر را تا یک رقم اعشاری محاسبه کنید:

- a) 814 b) 74 c) 427

2- جذر مربع اعداد زیر را تا دو رقم اعشاری محاسبه کنید:

- a) 94752 b) 5039 c) 418

قیمت تقریبی جذر مربع به طریقه اوسط

• آیا $\sqrt{81}$ را گفته می‌توانید که چند است؟

• آیا $\sqrt{\frac{25}{16}}$ را گفته می‌توانید که چند است؟

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

شما می‌دانید هر عددی که در نفس خود ضرب شود حاصل ضرب به دست آمده بنام مربع عدد اولی یاد می‌شود. ولی جذر مربع تمام اعداد مثبت را به شکل کسری یا

نسبتی ارائه کرده نمی‌توانیم؛ مانند: $\sqrt{30}, \sqrt{10}, \sqrt{5}$

از این رو قیمت جذر مربع بعضی از اعداد به شکل تقریبی ارائه می‌شود.

در اینجا می‌خواهیم قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ را دریافت کنیم.

سؤال: عدد 5 بین مربعات کدام دو عدد قرار دارد؟

$\sqrt{5}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

با در نظر داشت اینکه جذر مربع 5 بین 2 و 3 قرار دارد می‌توان گفت که جذر مربع 5

تقریباً مساوی به قیمت وسطی 2 و 3 است. یعنی: $\frac{2+3}{2} = 2.5$

برای پیدا کردن قیمت دقیقتر $\sqrt{5}$ جدول زیر را در نظر می‌گیریم:

عدد	مربع
2	4
2.5	6.25
3	9

عدد 5 بین مربع 2 و 2.5
به عباره دیگر $\sqrt{5}$ بین 2 و 2.25 قرار دارد

با در نظر داشت اینکه عدد 5 بین 4 و 6.25 قرار دارد می‌توان گفت که قیمت تقریبی

$$\sqrt{5} \text{ قیمت وسطی 2 و 2.5 است. } \frac{2+2.5}{2} = \frac{4.5}{2} = 2.25$$

جدول مقابل را تکمیل کنید.

عدد	مربع
2	4
2.25	
2.5	6.25

بدر نظر داشت جدول فوق گفته می‌توانید $\sqrt{5}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟
 دیده می‌شود که قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ با در نظر داشت این دو مرحله عبارت از 2.25 بوده پس نوشته کرده می‌توانیم که: $\sqrt{5} \approx 2.25$
 هر قدر که به روش فوق عملیه های بالا را تکرار نماییم به $\sqrt{5}$ بیشتر نزدیک می‌شویم.



در نتیجه می‌توانیم جذر تقریبی اعداد را با استفاده از روش فوق دریافت نماییم.

مثال: جذر تقریبی $\sqrt{10}$ را دریافت کنید.

حل: با استفاده از روش فوق تقریب اولی $\sqrt{10}$ می‌تواند قیمت وسطی 3 و 4 باشد.
 $\frac{3+4}{2} = 3.5$, $3 < \sqrt{10} < 4$, $9 < 10 < 16$

عدد	مربع
3	9
3.5	12.25
4	16

خلاصه عملیه فوق را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید:

$\sqrt{10}$ بین 3 و 3.5

از جدول فوق نتیجه می‌گیریم که: $\sqrt{10} \approx 3.5$
 با در نظر داشت این که عدد 10 بین 9 و 12.25 قرار دارد می‌توان گفت که قیمت تقریبی $\sqrt{10}$ قیمت وسطی 3 و 3.5 است. $\frac{3+3.5}{2} = \frac{6.5}{2} = 3.25$
 برای دریافت قیمت دقیقتر $\sqrt{10}$ جدول زیر را در نظر می‌گیریم.

عدد	مربع
3	9
3.25	10.5625
3.5	12.25

$\sqrt{10}$ بین 3 و 3.25

در نتیجه: $\sqrt{10} \approx 3.25$

تمرین

1- صحت هریک از غیر تساوی های زیر را نشان دهید:

a) $3 < \sqrt{12} < 4$

b) $7.1 < \sqrt{51} < 7.2$

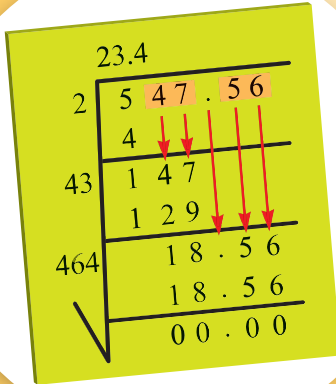
2- با استفاده از روش قیمت وسطی جذر مربع تقریبی اعداد زیر را محاسبه کنید:

a) 21

b) 12

c) 7

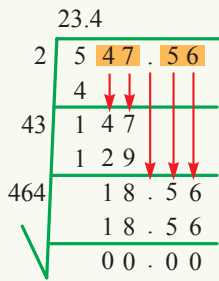
جذر اعداد اعشاری دار



اگر یک عدد اعشاری دار را مربع کنیم تعداد رقم های بعد از اعشاری آن جفت است. در صورتی که تعداد رقم های بعد از اعشاری آن تاق باشد چه عمل را باید انجام دهیم؟

مثال: جذر مربع عدد 547.56 را محاسبه کنید.

حل: چون تعداد ارقام بعد از اعشاری جفت است؛ پس می توان قسمت صحیح را از راست به چپ و قسمت اعشاری آن را برعکس از چپ به راست دو دو خانه جدا کنیم؛ پس مانند قبل از طریق روش دریافت جذر عمومی ، جذر عدد را استخراج می نماییم.



در نتیجه: $\sqrt{547.56} = 23.4$

- عدد 381.291 چند رقم اعشاری دارد؟

- برای پیدا کردن جذر مربع این عدد در قدم اول چه باید کرد؟

- جذر مربع آن را دریافت کنید.

- قبل از جذر گرفتن تخمین کرده می توانید جذر مربع این عدد چند رقم اعشاری دارد؟

- باقیمانده جذر گرفته شده ، چند رقم اعشاری باید داشته باشد؟

در گذشته ما در عملیات چهار گانه به خاطر مطمئن شدن از حل درست سؤال، جواب را امتحان می کردیم؛ بنا براین در جذر اعداد اعشاریه دار نیز این عمل را انجام می دهیم.

فعالیت

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ 10 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

جز (a) تقسیم مقابل را در نظر بگیرید. $5 \times 2 + 3 = 10 + 3 = 13$ ✓

جز b)

$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ 5 & 1 \\ \hline 8 & \end{array}$$

$$5 \times 1 + 8 = 5 + 8 = 13 \quad \times$$

با در نظر داشت عملیه های جزء a و b شرایط درست بودن عمل تقسیم را شرح دهید.

سؤال: چگونه می توان اطمینان حاصل کرد که عملیه جذر گرفتن درست است؟

مثال: جذر مربع عدد 149 را دریافت نموده و درست بودن

آنرا امتحان می کنیم.

حل:

$$\begin{array}{r|l} 12 & \\ 1 & 1 \ 4 \ 9 \\ \hline & 1 \\ 22 & 0 \ 4 \ 9 \\ & 4 \ 4 \\ \hline \sqrt{} & 0 \ 5 \end{array}$$

$$\text{امتحان: } (12 \times 12) + 5 = 144 + 5 = 149$$

سؤال: چرا 12 را ضرب 12 می کنیم؟

آیا برای اثبات درست بودن جذر فقط اجرای این عمل کافی

است؟ اگر شاگرد اشتباه در جذر 149 جذر مربع 11 ضرب

11 و باقیمانده یعنی 28 را جمع آن کند مساوی به عدد اصلی می شود.

$$149 = 28 + (11 \times 11) \text{ آیا میتوانیم جواب آن را درست قبول کنیم؟}$$

از مثال فوق نتیجه می گیریم که برای امتحان کردن عملیه جذر مربع، شرط دیگری

هم لازم است: دو چند جذر مربع یعنی $2 \cdot 12$ جمع 1 بزرگتر از باقیمانده یعنی 5

می باشد و یا $5 < 2 \times 12 + 1$

سؤال: با در نظر داشت فعالیت فوق نشان دهید که چرا جواب 11 اشتباه بود؟

برای امتحان کردن جذر مربع شرایط زیر باید در نظر گرفته شود:

1- حاصل ضرب جذر مربع در خودش جمع باقیمانده مساوی به عدد اصلی است.

2- دو چند جذر مربع یک عدد، جمع یک از باقیمانده بزرگتر است.

تمرین

جذر مربع اعداد زیر را دریافت نموده امتحان کنید:

$$1) 780.81 = ? \quad 2) 6721 = ? \quad 3) 973 = ? \quad 4) 692.916 = ?$$

جمع و تفریق اعداد جذر دار

$$2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - \sqrt{3} = ?$$

$$x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = ?$$

شما می دانید که در ست اعداد
ناطق برای هر عدد حقیقی a
می توانیم بنویسیم.

$$3a + 2a = (3 + 2)a = 5a$$

$$3a - 2a = (3 - 2)a = a$$

آیا اعداد جذردار را نیز باهم
جمع و تفریق کرده می توانید؟

تساوی های زیر را در نظر بگیرید:

$$2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (2 + 4)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$2 \times \sqrt{13} + 3 \times \sqrt{13} = (2 + 3) \times \sqrt{13} = 5 \times \sqrt{13}$$

برای آسانی $5 \times \sqrt{13}$ را به شکل $5\sqrt{13}$ می نویسیم.

برای دریافت حاصل جمع از خاصیت های اعداد حقیقی استفاده می کنیم.

سؤال: آیا برای تفریق اعداد حقیقی از روش جمع استفاده کرده می توانیم؟

فعالیت

در مساوات دوم به جای 5، (2-7) را قرار دهید. مشابه به روش فوق محاسبه را انجام دهید.

جمع و تفریق اعداد جذری در صورتی ممکن است که درجه جذر و اعداد تحت جذر
یکسان باشند. ضرایب حدود مشابه جذور را با هم جمع یا از هم تفریق می کنیم.

$$x\sqrt[n]{a} \pm y\sqrt[n]{a} = (x \pm y)\sqrt[n]{a}$$

سؤال: آیا گفته می توانید جذرهای مشابه کدام ها اند؟ آیا $\sqrt{10}$ و $\sqrt{5}$ باهم مشابه
اند؟

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = ? \quad \text{مثال 1:}$$

حل: چون اعداد تحت جذر و درجه جذور با هم مساوی اند.

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

بنابراین:

$$18\sqrt{12} - 16\sqrt{12} = ?$$

مثال 2:

$$18\sqrt{12} - 16\sqrt{12} = (18 - 16)\sqrt{12} = 2\sqrt{12}$$

حل:

$$8\sqrt{48} - 10\sqrt{48} - 3\sqrt{48} = ?$$

مثال 3:

حل: با استفاده از خاصیت توزیعی اعداد حقیقی

$$8\sqrt{48} - 10\sqrt{48} - 3\sqrt{48} =$$

در مرحله اول نتیجه دو حد را به دست آورده بعد نتیجه را از حد سوم تفریق می کنیم.

$$= (8 - 10)\sqrt{48} - 3\sqrt{48}$$

$$= -2\sqrt{48} - \sqrt{48} = (-2 - 3)\sqrt{48} = -5\sqrt{48}$$

فعالیت

- قیمت $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ و $\sqrt{9+16}$ را به دست آورید آیا قیمت ها با هم مساوی اند؟
- قیمت های $\sqrt{100} - \sqrt{36}$ و $\sqrt{100-36}$ را به دست آورید آیا نتایج این دو عملیه با هم مساوی اند؟

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

از فعالیت بالا نتیجه می شود که:

تمرین

1- حاصل جمع و حاصل تفریق اعداد جذری زیر را به دست آرید:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$

b) $\sqrt{50} - 3\sqrt{50}$

c) $\sqrt{81} + \sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt{5} \times \sqrt{36} + \sqrt{5} \times \sqrt{36}$

2- کدام اعداد جذری را می توان باهم جمع یا از همدیگر تفریق نمود؟

a) $4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt{2}$

b) $5\sqrt{4} + 3\sqrt{4}$

c) $5\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6}$

d) $7\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{6}$

ضرب و تقسیم جذرها

$$\sqrt{\frac{36 \times 9}{16}} = \frac{\sqrt{36} \times \sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{6 \times 3}{4} = \frac{9}{2}$$

آیا اعداد جذری را باهم ضرب و تقسیم کرده می‌توانید؟

فعالیت

• جذور اعداد زیر را محاسبه کنید:

$$\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{36 \times 9} = \sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \dots\dots \times \dots\dots =$$

$$\sqrt{36} \times \sqrt{9} = \dots\dots \times \dots\dots =$$

$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{25 \times 36} = \sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \dots\dots \times \dots\dots =$$

$$\sqrt{25} \times \sqrt{36} = \dots\dots \times \dots\dots =$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم:

برای هر عدد حقیقی اختیاری مثبت a و b داریم: $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

مثال 1:

حل:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{20 \times 5} = \sqrt{100} = 10$$

$$\begin{aligned} \sqrt{0.25} &= \sqrt{0.01 \times 25} = \sqrt{0.01} \times \sqrt{25} \\ &= 0.1 \times 5 = 0.5 \end{aligned}$$

با انجام دادن عملیه‌ها، بالای جذور سعی می‌کنیم افاده ساده‌تری را به دست آوریم که این عمل را ساده کردن جذرها می‌نامند.

$$\sqrt{75} = ?$$

مثال 2:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5 \times \sqrt{3} \approx 5 \times 1.7 = 8.5$$

حل:

$$\sqrt{64a^2} = ?$$

مثال 3: این افاده را ساده کنید:

حل:

$$\sqrt{64a^2} = \sqrt{64} \times \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{8^2} \times \sqrt{a^2} = 8a$$

مثال 4: می‌خواهیم افاده‌های جذری زیر را با هم ضرب نماییم:

$$(2\sqrt{6})(5 - \sqrt{3})$$

حل:

$$= (2\sqrt{6} \times 5) - (2\sqrt{6} \times \sqrt{3})$$

$$= 10\sqrt{6} - 2\sqrt{18} = 10\sqrt{6} - 2\sqrt{9 \times 2}$$

$$= 10\sqrt{6} - 2\sqrt{9} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$$

آیا می‌توانید مشابه به قانون ضرب جذرها، برای تقسیم نیز قاعده‌یی را دریافت کنید؟

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\sqrt{\frac{16}{100}} = \sqrt{16 \times 0.01} = \sqrt{16} \times \sqrt{0.01} = 4 \times 0.1 = 0.4 = \frac{4}{10} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}$$

اگر به جای 16، a و به جای 100، b بگذاریم برای $b \neq 0$ داریم:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = ?$$

مثال 5:

حل:

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{9 \times 4}{49}} = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{4}}{\sqrt{49}} = \frac{3 \times 2}{7} = \frac{6}{7}$$

تمرین

1- افاده‌های زیر را ساده کنید:

a) $\sqrt{144a^2}$ b) $\sqrt{169a^2}$ c) $\sqrt{0.003}$

2- افاده‌های زیر را ساده کنید:

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = ?$

b) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} = ?$

c) $\sqrt{\frac{81a^4}{125c^6}} = ?$



قوانین اعداد توان دار ضرب اعداد توان دار

در لابراتوارها از میکروسکوپ‌ها برای بزرگ شدن اجسام استفاده می‌کنند. هر میکروسکوپ دو عدسیه دارد که یک عدسیه آن نزدیک به چشم و دیگری نزدیک جسم قرار دارد. عدسیه نزدیک جسم، اندازه را 2^2 برابر و عدسیه نزدیک چشم، تصویر را 2^3 برابر بزرگ می‌سازد. تصویر جسم چند برابر بزرگ می‌شود؟

در صنف گذشته توان و قوانین مربوطه آن را برای اعداد طبیعی مورد مطالعه قرار دادیم در این بخش می‌خواهیم برای اعداد حقیقی آن را مورد مطالعه قرار دهیم.

فعالیت

• جاهای خالی را با اعداد مناسب توان دار پر نمایید:

$$5^6 = 5^2 \times 5^4 = 5^3 \times \dots = 5^4 \times \dots = \dots \times 5^1$$

$$\dots = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^8 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \dots = \left(\frac{2}{5}\right)^9 \times \dots$$

$$a^5 = a^4 \times \dots = \dots \times a^2 = \dots \times a^3$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم که: هر گاه m و n اعداد تام و a یک عدد حقیقی باشد.
داریم که:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

اگر در ضرب اعداد توان دار قاعده‌ها مساوی و توان‌ها مختلف باشند. در این صورت از قاعده‌های مساوی یکی را مشترک گرفته و توان‌ها را باهم جمع می‌نماییم.

$$2^3 \times 2^4 = ?$$

مثال:

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

حل:

با یک مثال واضح سازید که $(-a)^n = -a^n$ همیشه درست نیست.

فعالیت

تساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$(14^9)^4 = (14^9) \times (14^9) \times (14^9) \times (14^9) = (14)^{9+9+9+9} = 14^{4 \times 9}$$

جاهای خالی را با اعداد مناسب توان دار پر نمایید.

$$(2^3)^4 = 2^3 \times \dots \times \dots \times \dots = 2^{3+\dots+3+3} = 2^{3 \times \dots}$$

$$(a^n)^4 = a^n \times \dots \times \dots \times \dots = a^{n+\dots+\dots+\dots} = a^{\dots \times 4}$$

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم برای هر عدد حقیقی a و دو عدد تام n و m داریم:

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$(2^{-2})^3 = (2^{-2})(2^{-2})(2^{-2}) = (2)^{-2-2-2} = 2^{-2 \times 3} = (2)^{-6}$$

مثال:

تساوی های زیر را در نظر بگیرید:

$$(30)^3 = (6 \times 5)^3 = (6 \times 5)(6 \times 5)(6 \times 5) = (6 \times 6 \times 6)(5 \times 5 \times 5) = 6^3 \times 5^3$$

$$(30)^3 = (10 \times 3)^3 = (10 \times 3)(10 \times 3)(10 \times 3) = (10 \times 10 \times 10)(3 \times 3 \times 3) = 10^3 \times 3^3$$

مساوات فوق به صورت عموم برای تمام اعداد حقیقی a , b و n یک عدد تام درست

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \text{ است.}$$

اگر در ضرب دو عدد توان دار قاعده ها مختلف و توان ها مساوی باشند؛ پس قاعده ها را با هم ضرب و از توان های مساوی یکی را می نویسیم.

$$4^3 \times 5^3 = ?$$

مثال:

$$(4 \times 5)^3 = 20^3$$

حل:

تمرین

با استفاده از قانون ضرب سؤال های زیر را به شکل یک توان بنویسید:

$$1) 6^2 \times 6^3 = ? \quad 2) (0.2)^2 \times (0.2)^2 = ? \quad 3) \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = ? \quad 4) \left(\frac{1}{4}\right)^{-7} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} = ?$$

$$5) 5^4 \times 5 = ? \quad 6) 27 \times 5^3 = ? \quad 7) a^7 \times b^7 \times c^7 = ? \quad 8) a^5 \times b^5 \times c^5 = ?$$

تقسیم اعداد توان دار

آیا تا به حال عکس خود را به اندازه

نیم ($\frac{1}{2}$) کوچک کرده‌اید؟ برای این هدف از کدام عمل ریاضی استفاده می‌کنیم؟



برای ضرب کردن دو عدد توان دار، توانستیم رابطه بین توان و قاعده را دریافت کنیم. آیا می‌توانید به صورت مشابه در رابطه تقسیم دو عدد توان دار رابطه‌ی را دریافت کرد؟

فعالیت

$$3^5 \div 3^4 = \frac{3^5}{3^4} = \frac{3^{\square} \times 3^4}{3^4} = 3^1 = 3^{5-\square}$$

• خانه‌های خالی را پر نمایید.

- چه رابطه بین توان صورت، توان مخرج و توان خارج قسمت وجود دارد؟
- آیا این رابطه برای تقسیم همه اعداد توان دار با قاعده‌های مساوی صدق مینماید؟

به صورت عموم هرگاه a یک عدد حقیقی خلاف صفر n و m اعداد تام باشند در این صورت داریم:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

در تقسیم دو عدد توان دار، در صورتی که قاعده‌ها باهم مساوی باشند از قاعده‌ها یکی را گرفته از توان صورت توان مخرج را تفریق می‌نماییم.

مثال: تقسیم‌های زیر را انجام دهید:

حل:

a) $5^{-7} \div 5^{-1}$ b) $5^3 \div 5^3$

a) $5^{-7} \div 5^{-1} = 5^{-7-(-1)} = 5^{-7+1} = 5^{-6}$

b) $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$

فعالیت

• جاهای خالی را با نوشتن اعداد مناسب پر نمایید:

$$12^3 \div 4^3 = \frac{12^3}{4^3} = \frac{\square \times 12}{4 \times \square \times 4} = \left(\frac{\square}{4}\right) \times \left(\frac{12}{\square}\right) \times \left(\frac{12}{4}\right) = \left(\frac{12}{4}\right)^3 = 3^3$$

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم که به صورت عموم برای تمام اعداد حقیقی a و b ،
 طوری که $b \neq 0$ و n عدد تام باشند داریم: $\left(\frac{a^n}{b^n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

در تقسیم اعداد توان دار اگر قاعده ها مختلف و توان ها مساوی باشند، قاعده صورت را بر قاعده مخرج تقسیم و از توان ها یکی را به حیث توان حاصل تقسیم می نویسیم.

مثال: $a) 25^4 \div 5^4 = ?$ $b) 3^2 \div 10^2 = ?$

حل: نظر به قانون تقسیم اعداد توان دار می توان نوشت:

a) $(25 \div 5)^4 = 5^4$

b) $(3 \div 10)^2 = (0.3)^2$

در عملیه تقسیم دو عدد توان دار اگر قاعده ها و توان ها در صورت و مخرج با هم فرق داشته باشند برای پیدا کردن حاصل تقسیم هر کدام را به صورت جداگانه در صورت و مخرج محاسبه نموده بعد صورت را بالای مخرج تقسیم می نماییم
یادداشت: قوانین فوق در صورتی که m, n اعداد حقیقی باشند نیز صحت دارد.

تمرین

1- با استفاده از قاعده تقسیم سؤال های زیر را حل نمایید:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \div \left(\frac{1}{2}\right)^3 = ?$

2) $13^7 \div 13^8 = ?$

3) $\frac{12^6}{12^5} = ?$

4) $\frac{7^5}{7^3} = ?$

5) $\frac{8^5}{8^3} = ?$

6) $6^3 \div 2^3 = ?$

توان صفر و توان منفی

$$2^3 = ?$$

$$2^0 = ?$$

$$2^{-1} = ?$$

2^3 را محاسبه کنید.

آیا 2^0 را می توان محاسبه کرد؟

آیا اعداد را به توان صفر نوشته

می توانیم؟

آیا اعداد را به توان منفی نوشته

کرده می توانیم؟

فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید:

عدد توان دار	$2^4 \div 2$	$2^3 \div 2$	$2^2 \div 2$	$2^1 \div 2$
حاصل	8			

- چه رابطه بین توان های سطر اول وجود دارد؟
- چه رابطه بین اعداد سطر دوم جدول می یابید؟
- عملیه سطر اول را ادامه دهید و عدد بعدی را 2^0 قرار دهید. با توجه به رابطه که بین اعداد سطر دوم وجود دارد چه عددی را برای 2^0 در سطر دوم دریافت کرده می توانید؟
- جدول بالا را برای عدد 3 تکرار کنید؛ طوری که عین اعداد در توان تکرار شوند.
- جدول زیر را برای عدد $a \neq 0$ تکمیل کنید:

عدد توان دار	$a^4 \div a$	$a^3 \div a$	$a^2 \div a$	$a^1 \div a$
حاصل	a^3			

عملیه سطر اول را ادامه داده، عدد بعدی را a^0 قرار دهید. با توجه به رابطه یی که بین اعداد سطر دوم وجود دارد چه عددی را برای a^0 در سطر دوم دریافت کرده می توانید؟

از فعالیت بالا نتیجه می گیریم که برای هر عدد حقیقی a خلاف صفر داریم:

$$a^0 = 1$$

فعالیت

• جدول زیر را در نظر بگیرید:

اعداد توان دار	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}
حاصل	27	9	3	1	

- چه رابطه‌ی بین اعداد سطر اول و اعداد سطر دوم جدول می‌یابید؟
- عملیۀ سطر اول را ادامه داده عدد توان دار بعدی را 3^{-1} قرار دهید.
- اکنون با در نظر داشت رابطه بین اعداد سطر دوم که پیدا کرده اید، چه اعدادی را برای 3^{-2} و 3^{-1} دریافت می‌کنید؟
- برای عدد $a \neq 0$ جدول بالا را تکرار بنویسید. چه اعدادی را برای a^{-1} و a^{-2} پیدا کرده می‌توانید؟

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد حقیقی $a \neq 0$ و n یک عدد تام داریم که:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال: افاده‌های $(1.3)^{-3}$ و $(-15)^{-21}$ را به شکل توان مثبت بنویسید.

حل: $(1.3)^{-3} = \frac{1}{(1.3)^3}$ ، $(-15)^{-21} = \frac{1}{(-15)^{21}}$

تمرین

1- افاده‌های زیر را به توان مثبت بنویسید:

a) 5^{-2} b) $(\sqrt{7})^{-5}$ c) $(\frac{1}{3})^{-3}$ d) $(2\pi)^{-3}$

2- هر یک از افاده‌های زیر را به صورت یک افاده با توان منفی بنویسید:

a) 0.0001 b) $\frac{1}{b^2}$ c) $\frac{1}{6^4}$ d) $\frac{1}{3^{11}}$

طاقة نما های کسری و قوانین آن

$$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

شما قوانین طاقا نما ها را قبلاً خواندید، آیا می توانید قوانین فوق را بالای توان های کسری نیز تطبیق کنید؟

فعالیت

- آیا $\sqrt{16}$ و $\sqrt{-16}$ با هم مساوی اند؟
- $\sqrt[3]{-8}$ و $\sqrt[3]{8}$ مساوی به چند است؟
- آیا $\sqrt{a}$ را به شکل توان می توان نوشت؟ $\sqrt[n]{a}$ را به شکل توان بنویسید.

از فعالیت فوق می توان بیان کرد:

اعداد منفی در ست اعداد حقیقی جذرالمریع ندارند. هر عدد حقیقی چه مثبت و چه منفی باشد، جذر سوم دارد.

یک عدد جذر دار را به شکل علمی چنین می نویسند: $\sqrt[n]{a}$

و این قسم خوانده می شود (جذر n ام a).

مقصود از جذر n ام یک عدد، عددی است که هرگاه آن عدد به توان n بلند برده شود، عدد تحت جذر حاصل می شود.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

توان عدد تحت جذر $\nearrow$
درجه جذر $\searrow$

به یاد داشته باشید: اگر توان یک عدد تحت جذر و درجه جذر با هم مساوی باشند

پس:

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

فعالیت

• جا های خالی را پر کنید:

$$a^{\square} + 2a^{\frac{1}{3}} = \square a^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{a}, \quad 3a^{\square} - a^{\frac{1}{5}} = 2a^{\square} = 2\square\sqrt{a}$$

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم، I: هرگاه قاعده ها مشابه و توان های کسری مساوی باشند برای تمام $a \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ می توانیم بنویسیم:

$$ma^{\frac{1}{n}} \pm ba^{\frac{1}{n}} = (m \pm b)a^{\frac{1}{n}} = (m \pm b)\sqrt[n]{a}$$

مثال:

$$2(15)^{\frac{1}{3}} + 3(15)^{\frac{1}{3}} - (15)^{\frac{1}{3}}$$

حل:

$$= (2 + 3 - 1)(15)^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{15}$$

II: در عملیه تقسیم هر گاه قاعده ها مساوی و توان های کسری مختلف باشند برای

$$a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{m \cdot n}} = a^{\frac{n-m}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}} \quad : \text{داریم } a \neq 0 \text{ و } a \in \mathbb{R}$$

مثال:

$$\frac{5^{\frac{3}{4}}}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{5}$$

حل:

III: در عملیه ضرب به صورت عمومی می توان گفت هرگاه قاعده ها مختلف و

توان های کسری مساوی باشند می توان رابطه ذیل را نوشت:

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{abc}$$

مثال:

$$(7)^{-\frac{5}{8}} \cdot (6)^{-\frac{5}{8}} \cdot (9)^{-\frac{5}{8}} = (7 \cdot 6 \cdot 4)^{-\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{(7 \cdot 6 \cdot 4)^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[8]{(7 \cdot 6 \cdot 4)^5}}$$

حل:

$$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

IV

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = ? \quad \text{مثال:}$$

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = (a)^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = (a)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a}$$

حل:

ناطق سازی یا گویا کردن کسر ها

$$\sqrt{2} \approx ?$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx ?$$

قیمت تقریبی $\sqrt{2}$ را دریافت کردیم.

قیمت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ به صورت تقریبی چند خواهد بود؟

معمولاً کار کردن با اعدادیکه در مخرج آن‌ها جذر نباشد، آسانتر است اگر در مخرج عدد، جذر موجود باشد، این گونه اعداد را طوری می‌نویسیم که در مخرج کسر، جذر از بین برود؛ ولی چگونه باید این کار را انجام داد؟

فعالیت

• خانه‌های خالی را با اعداد مناسب پر نمایید:

$$\sqrt{3} \times \square = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} \times \square = 2$$

$$\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15 \times \square}{\sqrt{5} \times \square} = \frac{15 \square}{5} = 3\sqrt{5}$$

با استفاده از فعالیت بالا دیده می‌شود که برای از بین بردن جذر مربع در مخرج یک کسر صورت و مخرج کسر را به مخرج آن ضرب می‌نماییم.

مثال: در عدد $\frac{1}{\sqrt{2}}$ می‌توانیم جذر را از مخرج آن حذف کنیم.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

حل:

فعالیت

• جاهای خالی را پر کنید:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^{\square}} = \square$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\square^3} = \square$$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{\square^{\square}} = 2$$

$$\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{\square} = \sqrt[3]{\square^3} = \square$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{4}} = \frac{6 \times \square}{\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{6\sqrt[3]{\square}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\square \sqrt[3]{2}}{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم که برای از بین بردن جذر سوم از مخرج یک کسر، باید صورت و مخرج را در جذر سوم عدد ضرب کنیم تا زیر علامت جذر توان 3 به وجود آید.

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

b) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$

مثال: کسره‌ای زیر را ناطق سازید:

حل:

$$a) \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$$

$$b) \frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5 \times \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{5} = \sqrt[3]{5^2}$$

تمرین

1- کسره‌ای زیر را ناطق سازید:

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

2) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

4) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$

5) $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

نکات مهم فصل اول

• اعداد حقیقی

- 1- اتحاد ست اعداد ناطق و غیر ناطق را به نام ست اعداد حقیقی یاد می کنند.
- 2- هر نقطه محور اعداد حقیقی به یک عدد حقیقی و معکوساً هر عدد حقیقی به یک نقطه خط اعداد مطابقت می کند.

• خواص اعداد حقیقی

- 1- خاصیت تبدیلی عملیه های جمع و ضرب صدق می کند.
- 2- خاصیت اتحادی در عملیه های جمع و ضرب صدق می کند.
- 3- خاصیت توزیعی عملیه ضرب بالای جمع صادق است.
- 4- جذرالمربع تقریبی اعداد

• جذر المربع تقریبی اعداد

- 1- دریافت جذرالمربع تقریبی اعداد تام و اعشاری دار به طریقه عمومی
- 2- به طریقه قیمت اوسط

• ضرب و تقسیم جذر ها

- 1- ضرب جذر ها $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 2- تقسیم جذر ها $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- در اعداد جذر دار تنها جذر های مشابه را با هم جمع و تفریق کرده می توانیم.

• توان و قواعد آن

- 1- $a^0 = 1$ ، a یک عدد حقیقی و خلاف صفر است.
- 2- $a^{-1} = \frac{1}{a}$ وقتی که $a \neq 0$ و یک عدد حقیقی باشد.
- 3- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ، $a \neq 0$ و یک عدد حقیقی
- 4- ضرب توان ها $(a^m)^n = a^{m \times n}$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- 5- تقسیم توان ها $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ ، $b \neq 0$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

• ناطق یا گویا ساختن کسر ها

برای ناطق یا گویا ساختن یک کسر جذر مخرج را رفع می نماییم.

تمرینات عمومی

I. مساوات و افاده های زیر را به دقت خوانده جاهای خالی را با اعداد و کلمات مناسب پر

نمایید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots -1$$

$$a^{-8} \div a^{-1} = \dots\dots\dots -2$$

$$5^9 \times \dots\dots\dots = (5 \times 7)^9 -3$$

-4 عدد π یک عدد..... است.

II. عبارت های زیر را به دقت خوانده اگر درست است حرف (ص) و اگر غلط است حرف

(غ) را پیش روی سؤال بگذارید.

-1 () اتحاد اعداد نسبتی و اعداد تام را به نام ست اعداد حقیقی یاد می کنند.

-2 () خاصیت توزیعی ضرب بالای عملیۀ جمع در اعداد حقیقی درست است.

-3 () $\sqrt{3}$ عدد غیر ناطق است.

-4 () $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ می شود.

III. برای سؤال های زیر چهار جواب داده شده است، جواب درست را دریافت نموده و

دور آن را حلقه نمایید:

$$\frac{4^7}{4^5} = ? -1$$

a) 4^0

b) 4^2

c) 4^{-1}

d) 4^1

$$(6y^3z^2)^2 = ? -2$$

a) $36y^6z^4$

b) $36y^3z^4$

c) $36y^6z^2$

هیچ کدام d)

$$\sqrt{81 \times 9} = ? -3$$

a) 27

b) $\frac{1}{27}$

c) 24

d) 25

$$\sqrt{\frac{49a^4}{144b^4}} = ? -4$$

$$a) \frac{8a^2}{12b^2}$$

$$b) \frac{7a^2}{12}$$

$$c) \frac{7a}{12b^2}$$

$$d) \frac{7a^2}{12b^2}$$

5- کدام دو عدد افاده های جذری متشابه اند؟

$$a) 2\sqrt{3} \quad , \quad 3\sqrt{2}$$

$$b) 5\sqrt{2} \quad , \quad 3\sqrt{2}$$

$$c) 5\sqrt{3} \quad , \quad 2\sqrt{5}$$

$$d) 6\sqrt{3} \quad , \quad 3\sqrt{3}$$

IV. سوال های زیر را حل نمایید:

$$6\sqrt{125a^2} + \sqrt{5a^2} = ? -1$$

$$2- \text{ قیمت تقریبی } \sqrt{0.5} \text{ را حساب کنید.}$$

3- افاده های زیر را ساده سازید:

$$a) (-25a^2b)^3 = ?$$

$$b) (-4a \times 2a)^2 = ?$$

$$c) (-2^{-4}x)^3$$

4- جذر دوم 2475 را استخراج و امتحان نمایید.

5- افاده های زیر را ساده سازید:

$$(625a^2b^2)^6 \quad , \quad (-10^3)^5 \quad , \quad (-4q^2p^3)^4$$

6- افاده های زیر را به شکل توان مثبت بنویسید:

$$(27)^{-7} \quad , \quad (9x^2)^{-4} \quad , \quad (6ab)^{-6}$$

7- افاده های زیر را به شکل توان منفی بنویسید:

$$\frac{1}{(36)^2} \quad , \quad \frac{26}{(16)^6} \quad , \quad \frac{-ab}{(cd)^4}$$

8- افاده های زیر را ساده سازید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \quad , \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \quad , \quad \sqrt{144} \times \sqrt{169}$$

$$(-6)^3 \times (-6)^{-5} \quad , \quad (13a^2)^6 \quad , \quad \left\{\left(\frac{1}{4}xy\right)^2\right\}^6$$

9- افاده های زیر را با هم ضرب نمایید:

a) $(3\sqrt{8} + 2)(\sqrt{2} - 3\sqrt{7})$

b) $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

10- با دو مثال نشان دهید که: $a^m + a^n \neq a^{m+n}$

11- با دو مثال نشان دهید که: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

12- با دو مثال نشان دهید که: $a^m - a^n \neq a^{m-n}$

13- با دو مثال نشان دهید که: $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$

14- نخست افاده های زیر را ساده و سپس به شکل جذر بنویسید.

a) $5(25)^{\frac{1}{7}} + 7(25)^{\frac{1}{7}} + 4(25)^{\frac{1}{7}} = ?$ b) $36(15)^{\frac{6}{7}} - 17(15)^{\frac{6}{7}} = ?$

c) $\frac{(7)^{\frac{3}{5}}}{(7)^{\frac{3}{5}}} = ?$ d) $\frac{(17)^{\frac{2}{9}}}{(7)^{\frac{2}{3}}} = ?$ e) $(17^{\frac{3}{8}})^{\frac{1}{2}} = ?$ f) $(19^{\frac{5}{7}})^{\frac{2}{3}} = ?$

فصل دوم

محاسبات مالی







برای مالیکول آب فورمول کیمیاوی آن را بنویسید، نسبت اتم های هایدروجن و اکسیجن در یک مالیکول آب چند است؟

فعالیت

یک مالیکول آب از دو اتم هایدروجن و یک اتم اکسیجن ترکیب شده است. در جدول زیر نسبت هایدروجن بر اکسیجن را بنویسید:

مالیکول آب	1	2	3	4	5
نسبت هایدروجن بر اکسیجن	$\frac{2}{1} = 2$				$\frac{10}{5} = 2$

• آیا نسبت هایدروجن بر اکسیجن برای مالیکول های مختلف آب ثابت است.

مثال: اگر عرض یک اتاق 3 متر و طول آن 5 متر باشد نسبت عرض و طول آن چند است؟

حل:

$$\frac{3 \text{ متر}}{5 \text{ متر}} = \frac{3}{5} \text{ یا } 3 \div 5$$

فعالیت

- مستطیلی به طول 6cm و عرض 3cm رسم، محیط و مساحت آن را دریافت کنید.
- مستطیل دیگری به طول 4cm و عرض 2cm رسم کنید که نسبت طول مستطیل اولی بر طول مستطیل دومی و عرض مستطیل اولی بر عرض مستطیل دومی 3 بر 2 باشد.
- محیط و مساحت مستطیل دوم را دریافت کنید.
- نسبت محیط مستطیل اول بر محیط مستطیل دوم چند است؟

- نسبت مساحت مستطیل اول بر مساحت مستطیل دوم چند است؟
- چه رابطه‌ی بین این نسبت‌ها دریافت کرده می‌توانید؟

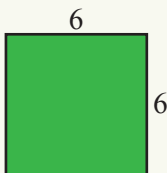
تعریف

نسبت بین دو کمیت و یا دو مقدار همجنس عبارت از آن عددی است که نشان می‌دهد کمیت اول چند برابر کمیت دوم و یا یک کمیت چندم حصه‌ی کمیت دیگر است و یا کمیت دوم چند مرتبه شامل کمیت اول است.

نسبت دو عدد را معمولاً با علامت‌های $(-)$ ، $\div$ یا به : نشان می‌دهند.
مثلاً: نسبت 5 بر 3 را به صورت $5 \div 3$ ، $\frac{5}{3}$ یا 5:3 نیز می‌توان نشان داد.

تمرین

- 1- نسبت 4 بر 7 حصه‌ی یک دایره را با نسبت 16 بر 28 حصه‌ی یک دایره‌ی دیگر مقایسه کنید.
- 2- اگر تعداد گروه اول شاگردان یک صنف 25 نفر و تعداد گروه دوم آن 40 نفر باشند نسبت تعداد شاگردان گروه دوم بر گروه اول را دریابید.
- 3- مربعی را به طول 3 واحد رسم کنید که نسبت یک ضلع آن بر یک ضلع مربع رسم شده‌ی زیر برابر $\frac{1}{2}$ باشد به همین ترتیب نسبت محیط و مساحت مربع دوم بر محیط و مساحت مربع اولی را پیدا کنید.



تقسیم به اجزای متناسب Proportional division



- دو برادر مشترکاً یک ساختمان را اعمار می کنند. اگر یکی آن بیشتر از دیگری کار کرده باشد. آیا فکر می کنید به یک اندازه دست مزد به آن ها داده شود؟
- چطور می توان تعیین کرد که به هر کدام چقدر پول باید پرداخته شود؟

فعالیت

سه نفر از شاگردان یک صنف روزی تصمیم گرفتند که به میله برونند یکی از شاگردان گفت که من سه دانه تخم مرغ و چهار دانه سیب می آورم. دو شاگرد دیگر گفتند ما هم همین چیزها را می آوریم، یعنی تصمیم گرفتند که در مقابل هر سه دانه تخم مرغ چهار سیب تهیه کنند. جدول مقابل را تکمیل کنید.

تخم مرغ	3	6	9
سیب	4		
مجموع تخم مرغ و سیب	7		

- نسبت تعداد تخم های مرغ بر مجموع تعداد تخم های مرغ و سیب ها را در هر یکی از حالات فوق پیدا کنید.
- چه رابطه بین نسبت های آن ها وجود دارد؟
- نسبت تعداد سیب بر مجموع تعداد تخم مرغ و سیب را در هر یکی از حالات فوق پیدا کنید.
- چه رابطه بین نسبت های آنها وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم که دو مقدار وقتی با هم متناسب اند که نسبت هر مقدار بر مجموع تعداد آن دو مقدار همیشه عدد ثابت باشد. از این نتیجه گیری می توانیم در حل مسائل استفاده کنیم.

فعالیت

	مقدار نسبی	مقدار واقعی
طول	4	
عرض	3	
محیط		280
مساحت		

طول و عرض یک قطعه زمین مستطیل شکل، به نسبت 4 بر 3 است. اگر محیط این زمین 280 متر باشد. مساحت آن چند متر مربع است؟
برای جواب دادن به این سؤال جدول مقابل را تکمیل کنید.

برای تقسیم کردن یک عدد به نسبت های داده شده نخست حاصل جمع نسبت های داده شده را به دست می آوریم. بعد از آن عدد مفروض را به این مجموع تقسیم نموده و خارج قسمت حاصله را به هر یک از نسبت های داده شده ضرب می نماییم، اعدادی که حاصل می شوند، حاصل تقسیم عدد مورد نظر به نسبت های داده شده است.

مثال: مبلغ 27000 افغانی را می خواهیم بین احمد و مسعود به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم کنیم. نخست جدول زیر را تکمیل می کنیم:

احمد	مسعود	مجموع نسبت ها
2	3	5
x	y	27000

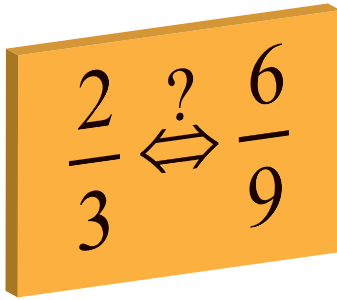
$$x = \frac{27000}{5} \times 2 = 5400 \times 2 = 10800 \text{ : حصه احمد}$$

$$y = \frac{27000}{5} \times 3 = 5400 \times 3 = 16200 \text{ : حصه مسعود}$$

تمرین

- اگر نسبت دو عدد $\frac{3}{5}$ و عدد دوم آن 25 باشد عدد اول آن را معلوم کنید.
- دو نفر مشترکاً کار می کنند که مجموع پول های شان 280 افغانی و نسبت بین پول های شان $\frac{3}{4}$ است. دریافت کنید که نفر اول و دوم هر کدام چند افغانی گرفته اند؟
- روی قطعه خط AB که طول آن 32cm است نقطه M را طوری تعیین نمایید که قطعه خط مذکور را به نسبت $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{5}$ تقسیم کند. طول قطعه خط های AM و BM را دریافت کنید.
- 320 سیر گندم را بالای سه نفر د هقان به نسبت 5، 7، 9 تقسیم کنید.

تناسب Proportion



- در نسبت $\frac{3}{5}$ چند عدد می بینید؟
- چه رابطه بین نسبت های $\frac{2}{3}$ و $\frac{6}{9}$ وجود دارد؟
- آیا می توانید یک نسبت دیگری بنویسید که با نسبت های فوق مساوی باشد؟

فعالیت

نسبت تعداد پنسل پاک ها و قلم ها $\frac{3}{4}$ است.

با در نظر داشت نسبت تعداد پنسل پاک ها بر تعداد قلم ها جدول زیر را تکمیل کنید:

تعداد پنسل پاک ها	3	6
تعداد قلم ها	4	
نسبت		

- نسبت تعداد پنسل پاک ها بر تعداد قلم ها را در هر یکی از حالات داده شده با هم مقایسه کنید.
- در مساوات نسبت های فوق یعنی $3:4=6:8$ حاصل ضرب کدام جوره از اعداد با هم مساوی است. چرا؟

چهار عدد وقتی یک تناسب را تشکیل می دهند که نسبت عدد اول و دوم مساوی به نسبت عدد سوم و چهارم باشد.

مثال: در نسبت های زیر نسبت های مساوی را نشان دهید:

$$\frac{5}{8}, \frac{9}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

حل: اگر صورت و مخرج نسبت $\frac{3}{6}$ را اختصار کنیم، یعنی صورت و مخرج را به 3 تقسیم نماییم $\frac{1}{2}$ به دست می آید، پس گفته می توانیم که هر دو نسبت با هم مساوی اند.

$$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

تعريف

10 تناسب فوق را به شکل زیر هم نوشته کرده می توانیم:

در اینجا صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام طرفین تناسب، مخرج نسبت اول و صورت نسبت دوم را به نام وسطین تناسب یاد می نمایند.

وسطین ← → طرفین

تمرین

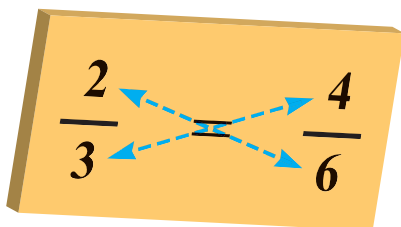
c) $\frac{7}{3}$, $\frac{35}{15}$

$$d) \frac{49}{35}, \frac{7}{5}$$

$$\text{c) } \frac{1}{3} = \frac{2}{\text{■}}$$

$$\text{f) } \frac{\text{■}}{14} = \frac{21}{7}$$

خواص تناسب Properties of proportion



- چهار عدد را طوری انتخاب کنید که باهم متناسب باشند.
- در تناسب تشکیل شده چه رابطه‌ی بین اعداد دریافت کرده می‌توانید؟

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید:

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	a . d	b . c
4	12	2	6	$\frac{4}{12}$			
5	20		8		$\frac{2}{8}$	40	

- در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، a ، b ، c و d چه نام دارند؟
- با استفاده از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ رابطه بین اعداد داده شده را بیان کنید.

به صورت عموم گفته می‌توانیم:

خاصیت اول: در دو نسبت مساوی که یک تناسب را تشکیل می‌دهد حاصل ضرب طرفین مساوی به حاصل ضرب وسطین است.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

مثال: با استفاده از خاصیت موجود بین طرفین و وسطین در یک تناسب حد نامعلوم را پیدا کنید.

$$\frac{2}{5} = \frac{\square}{12}$$

$$2 \times 12 = 5 \times \square$$

$$\square = 24 \div 5 = 4.8$$

حل:

فعالیت

با توجه به قیمت های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید:

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{d}{b}$	$\frac{c}{a}$
3	4	6	8	$\frac{3}{4}$					
9	12	21	28			$\frac{9}{21}$			

• با استفاده از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ رابطه بین اعداد داده شده را بیان کنید.

به صورت عموم می توان گفت:

خاصیت دوم: اگر در یک تناسب جا های وسطین را تبدیل کنیم یک تناسب جدید به

دست می آید.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

خاصیت سوم: هرگاه در یک تناسب جاهای طرفین را تبدیل نماییم، تناسب جدید تشکیل

می شود.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

مثال: نسبت طول بر عرض یک مستطیل $\frac{4}{3}$ است. اگر طول و عرض این مستطیل را 2 برابر کنیم. نسبت طول بر عرض مستطیل جدید چقدر است؟ آیا نسبت طول بر عرض دو مستطیل فوق یک تناسب را تشکیل می دهند؟

حل: نسبت طول بر عرض مستطیل جدید $\frac{8}{6}$ است.

$$\frac{4}{3} \text{ و } \frac{8}{6} \quad 4 \times 6 = 8 \times 3$$

چون نسبت طول بر عرض مستطیل ها باهم مساوی است. یعنی $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ ؛ پس نسبت طول بر عرض این مستطیل ها یک تناسب را تشکیل می دهند.

فعالیت

با توجه به قیمت های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید:

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{d}{c}$
2	3	8	12	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	
6	9	10	15		$\frac{10}{15}$		

• با استفاده از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ رابطه بین اعداد داده شده را بیان کنید.

به صورت عموم گفته می توانیم:

خاصیت چهارم: اگر دو نسبت یک تناسب را تشکیل دهند، معکوس آن ها نیز یک تناسب را تشکیل می دهند.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

فعالیت

با توجه به قیمت های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید:

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a+b}{b}$	$\frac{c+d}{d}$	$\frac{a-b}{b}$	$\frac{c-d}{d}$
6	9	12	18	$\frac{6}{9}$		$\frac{6+9}{9}$			
12	18	24	36		$\frac{24}{36}$				

• با استفاده از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ رابطه بین اعداد داده شده را بیان کنید.

به صورت عموم می گوییم:

خاصیت پنجم: هر گاه دو نسبت یک تناسب را تشکیل دهند و صورت هر نسبت را با مخرج جمع و حاصل آن را بر مخرج آن بنویسیم یک تناسب جدید حاصل می شود.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

خاصیت ششم: هر گاه در یک تناسب از صورت هر نسبت مخرج را تفریق و حاصل آن را بر مخرج آن بنویسیم یک تناسب حاصل می شود.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید:

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a+c}{b+d}$
1	2	7	14		$\frac{7}{14}$	
3	4	6	8			$\frac{3+6}{4+8}$

• با استفاده از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ رابطه بین اعداد داده شده را بیان کنید.

به صورت عموم می‌گوییم:

خاصیت هفتم: اگر در یک تناسب صورت‌ها را با هم جمع نموده در صورت نوشته و مخرج‌ها را با هم جمع نموده در مخرج بنویسیم، نسبت جدید با هر نسبت تناسب داده شده مساوی است.
مثلاً:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{3+6}{4+8} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \Rightarrow 3 \times 12 = 4 \times 9$$

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} \Rightarrow 6 \times 12 = 9 \times 8$$

تمرین

1- تناسب‌های زیر را با در نظر داشت قیمت‌های داده شده به شکل عددی بنویسید:

• $\frac{b}{a-b} = \frac{d}{c-d}$ باشد: $d = 15$ و $c = 30$ ، $b = 5$ ، $a = 10$

• $\frac{b}{a+b} = \frac{d}{c+d}$ باشد: $d = 36$ و $c = 32$ ، $b = 9$ ، $a = 8$

2- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد با استفاده از خواص تناسب چطور می‌توانید تناسب $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ را به دست آورید؟



انواع تناسب

تناسب به دو نوع است

1- تناسب مستقیم Direct proportion

- به خاطر ترتیب کردن کارهای دستی، نگران صنف به هر یک از شاگردان 2 بسته کاغذ رنگه داد. اگر صنف هشتم 20 نفر شاگرد داشته باشد، چند بسته کاغذ رنگه ضرورت است، تا برای همه شاگردان برسد؟

فعالیت

جدول های زیر را با در نظر داشت قیمت های داده شده یک کیلو گرام و ده کیلو گرام بوره تکمیل کنید:

مقدار	1 کیلو گرام	2 کیلو گرام	3 کیلو گرام	4 کیلو گرام	5 کیلو گرام
قیمت	50 افغانی				

مقدار	10 کیلو گرام	9 کیلو گرام	8 کیلو گرام	7 کیلو گرام	6 کیلو گرام
قیمت	500 افغانی				

- با زیاد شدن مقدار بوره قیمت آن چگونه تغییر می کند؟
- با کم شدن مقدار بوره قیمت آن چگونه تغییر می کند؟
- چه رابطه بین مقدار بوره و قیمت آن وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم که:

که قیمت بوره با مقدار آن رابطه مستقیم دارد، یعنی هر قدر مقدار بوره زیاد شود قیمت آن نیز زیاد می شود. هر قدر مقدار بوره کم شود قیمت آن نیز کم می شود.

تعریف

اگر در یک تناسب، زیاد شدن و یا کم شدن مقدار یک کمیت به ترتیب سبب زیاد شدن و یا کم شدن مقدار کمیت دیگر شود، این تناسب را تناسب مستقیم می نامند.

مثال: اگر قیمت 8 قوطی گوگرد 8 افغانی باشد قیمت 62 قوطی گوگرد چند افغانی خواهد بود؟

حل: اگر قیمت 62 قوطی گوگرد m افغانی فرض شود، چون تعداد قوطی های گوگرد مستقیماً متناسب به قیمت آن است، پس این یک تناسب مستقیم است.

گوگرد	قیمت
8	8
62	m

$$\frac{8}{62} = \frac{8}{m}$$
$$m = \frac{8 \times 62}{8} = 62$$

تمرین

1- مزد 12 نفر کارگر 480 افغانی است، مزد 10 نفر کارگر را معلوم کنید. (مزد همه کارگران برابر است).

2- اگر یک نفر کارگر در 5 روز 125 افغانی مزد بگیرد، مزد 18 روزه او چند افغانی می شود؟

3- برای خریدن 3 متر تکه 33.75 افغانی ضرورت است. برای خریدن 15 متر تکه چند افغانی به کار خواهد بود؟

2- تناسب معکوس Indirect proportion



- بعد از تزیین صنف نگران خواست که صنف را منظم بسازد. اگر یک شاگرد صنف را در 60 دقیقه پاک کند 6 نفر شاگرد در چند دقیقه می توانند صنف را پاک کنند.

فعالیت

اگر یک رنگمال یک اتاق را در چهار روز رنگ آمیزی کند، پس برای رنگ کردن یک اتاق در مدت یک یا دو روز چند کارگر ضرورت است؟
برای جواب به سؤال فوق جدول زیر را با در نظر داشت قیمت های داده شده تکمیل کنید:

1 روز	2 روز	4 روز	کار اجرا شده به روز
		1	تعداد کارگر

- با کم شدن تعداد روز، تعداد کارگران زیاد می شود یا کم؟
- چه رابطه بین کار اجرا شده، به روز و تعداد کارگران وجود دارد؟

تعریف

اگر در یک تناسب با زیاد شدن مقدار یک کمیت، مقدار دیگری کم و یا با کم شدن مقدار یک کمیت، مقدار دیگر زیاد شود این تناسب به نام تناسب معکوس یاد می شود. یعنی بین کمیت اولی و دومی رابطه معکوس وجود دارد.

مثال: یک مسجد را 20 نفر کارگر در 15 روز ترمیم می کنند. اگر بخواهند که این مسجد را در 10 روز ترمیم کنند برای آن چند نفر کارگر ضرورت است؟
حل: تناسب معکوس است، زیرا برای روز های کم تعداد زیاد کارگران ضرورت است.

نفر	$\frac{1}{\text{روز}}$
20	$\frac{1}{15}$
m	$\frac{1}{10}$

$$\frac{20}{m} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{15}, \quad \frac{20}{m} = \frac{10}{15}, \quad m = \frac{20 \times 15}{10} = 30 \text{ نفر}$$

تمرین

- 1- چهار نل، یک حوض را در 8 ساعت پر می کند، 5 نل، این حوض را در چند ساعت پر خواهد کرد؟ (قطرهای نل ها با هم مساوی اند).
- 2- یک موتور با سرعت 50 کیلومتر فی ساعت حرکت می کند و فاصله بین دو شهر را در 3 ساعت طی می کند. اگر سرعت موتور دیگری 75 کیلومتر فی ساعت باشد، فاصله بین دو شهر را در چند ساعت می پیماید؟

$$\frac{15}{100} = \frac{11}{x}$$

$$x = ?$$

تیم یک مکتب از 15 بازی انجام شده در منطقه، 11 بازی را برده است؛ اما تیم مکتب دیگر از 12 بازی انجام شده در 10 بازی برنده شده است. به نظر شما برد کلی کدام مکتب بیشتر است؟

فعالیت

تیل	آب
80	20
100	x

اگر در 80 لیتر تیل، 20 لیتر آب مخلوط شده باشد. پس در 100 لیتر تیل آن چند لیتر آب مخلوط است؟

- با در نظر داشت قیمت های جدول تناسب را تشکیل دهید.
- با استفاده از خاصیت طرفین و وسطین قیمت X را دریافت کنید.
- آیا گفته می توانید که در 100 لیتر تیل چند فیصد آب وجود دارد؟

مثال 1: شخصی 45000 افغانی را در بانک گذاشته بعد از مدتی 900 افغانی مفاد کرد. شخص مذکور از سرمایه اصلی خود چند فیصد مفاد گرفته است؟
حل: با استفاده از تناسب می توان نوشت:

سرمایه	نفع
45000	900
100	x

$$\frac{45000}{100} = \frac{900}{x}$$

با استفاده از خاصیت طرفین و وسطین:

$$x = \frac{900 \times 100}{45000} = \frac{90000}{45000} = \frac{90}{45} = 2\%$$

از حل مثال فهمیده می شود که در هر 100 افغانی شخص مذکور 2 افغانی یا 2% مفاد کرده است.

مثال 2: در امتحان کانکور پوهنتون از جمله 320 نفر فارغ التحصیل لسیه حبیبیه 256 نفر کامیاب و از جمله 400 نفر فارغ التحصیل لسیه غازی به تعداد 300 نفر کامیاب گردیده‌اند. گفته می‌توانید که کدام یکی از مکاتب نامبرده در امتحان با فیصدی بیشتر موفق بوده‌اند؟ فیصدی کامیابی شاگردان را دریافت نمایید.

حل:

کامیاب	فارغ التحصیل
256	320
x	100

$$\frac{256}{x} = \frac{320}{100}, \quad x = \frac{256 \times 100}{320} = \frac{2560}{32} = 80\%$$

فیصدی کامیابی لسیه حبیبیه

کامیاب	فارغ التحصیل
300	400
x	100

$$\frac{300}{x} = \frac{400}{100}, \quad x = \frac{300 \times 100}{400} = \frac{300}{4} = 75\%$$

فیصدی کامیابی لسیه غازی

گفته می‌توانیم که لسیه حبیبیه در امتحان کانکور نسبت به لسیه غازی موفق بوده است.

تعریف

فیصد طرز ارائه برای کسری است که مخرج آن‌ها 100 باشد. برای نمایش فیصد از علامت % استفاده می‌شود.

تمرین

- 1- یک دکاندار در یک ماه دو مرتبه مال وارد نموده است. مرتبه اول به سرمایه 25000 افغانی، مبلغ 800 افغانی مفاد نموده و مرتبه دوم از سرمایه 10000 افغانی، مبلغ 330 افغانی مفاد نموده است. فایده دکاندار در کدام مرتبه به تناسب سرمایه بیشتر بوده دریافت کنید؟
- 2- عبدالرحیم در مضمون ریاضی از 75 نمره 60 نمره به دست آورده است. فیصدی نمره عبدالرحیم را در مضمون ریاضی به دست آورید؟
- 3- از مساوات زیر کدام آنها صحیح می‌باشد؟ آن‌هایی که غلط‌اند، نسبت صحیح آن‌را بنویسید.

$$50\% = \frac{1}{2}, \quad \frac{111}{1000} = 11\%, \quad \frac{21}{100} = 21\%, \quad 4\% = \frac{4}{100}, \quad 30\% = \frac{30}{50}$$



- اگر قیمت یک مجموعه به صورت کل داده شده باشد چگونه می توانید قیمت یک دانه آن را دریافت کنید؟
- اگر قیمت یک دانه قلم داده شده باشد، آیا قیمت چند دانه آن را پیدا کرده می توانید؟

فعالیت

نسبت تعداد پیراهن ها بر تعداد روزهایی که یک خیاط می دوزد $\frac{28}{4}$ است. یعنی این خیاط 28 پیراهن را در 4 روز می دوزد، چند پیراهن را در یک روز خواهد دوخت؟ با در نظر داشت متن فوق جدول داده شده زیر را تکمیل کنید:

تعداد پیراهن	28	x
روز	4	1
نسبت		

- با استفاده از جدول فوق تناسب را تشکیل دهید.
 - با استفاده از خاصیت طرفین و وسطین قیمت x را دریافت کنید.
- پس گفته می توانیم: اگر قیمت یک مجموعه به صورت کل داده شده باشد، ما می توانیم قیمت یکدانه آن را دریافت کنیم.

مثال 1: قیمت یک بیرل تیل خاک (200 لیتر) مبلغ 10000 افغانی است. قیمت یک لیتر تیل را معلوم کنید.

لیتر تیل	قیمت به افغانی	$\frac{200}{1} = \frac{10000}{x}$
200	10000	$200x = 10000$
1	x	$x = \frac{10000}{200}$,

افغانی $x = 50$

مثال 2: یک درجن قلم پنسل (12 دانه یی) به مبلغ 240 افغانی خریده شده است. قیمت 7 دانه پنسل چند افغانی می شود؟

حل: نخست قیمت یکدانه قلم را دریافت می کنیم.

تعداد قلم پنسل	قیمت به افغانی
12	240
1	x

$$\frac{12}{1} = \frac{240}{x}$$

$$12x = 240$$

$$x = \frac{240}{12}, \quad x = 20 \text{ افغانی}$$

پس قیمت 7 دانه آن عبارت است از:

$$20 \cdot 7 = 140 \text{ افغانی}$$

در اکثر معاملات تجارتي که خرید و فروش اشيا و اجناس به صورت درجن و يا مجموعه صورت می گیرد. بعضی اوقات ضرورت می افتد تا قیمت یک و يا چند دانه آن را معلوم کنیم. برای اجرای این عمل از طریقه یی استفاده به عمل می آید که به نام احدیت یاد می شود. و احدیت را چنین تعریف می نماییم:

تعریف

احدیت عبارت از دریافت قیمت یک واحد از قیمت یک مجموعه است.

تمرین

- 1- قیمت 2 متر تکه 300 افغانی است، نخست قیمت یک متر آن را دریافت کنید و سپس بگوئید که قیمت 17 متر آن چند افغانی می شود؟
- 2- مصرف انتقال 60 کیلو گرام جنس در یک فاصله معین 2400 افغانی می شود نخست قیمت انتقال یک کیلو گرام آن را دریافت کنید و سپس بگوئید که قیمت مصرف انتقال 35 کیلو گرام چند افغانی خواهد شد؟

زکات



زکات عبارت از چهلم حصه دارایی های نقدی تحت شرایط معین می باشد که شریعت آن ها را مشخص نموده است.

بنابر آن نسبت بین زکات و سرمایه (پول نقد) عبارت است از :

$$\frac{\text{زکات}}{\text{سرمایه}} = \frac{1}{40}$$

فعالیت

- زکات بنای چندم اسلام است ؟
 - آیا پرداخت زکات بر ذمه هر مسلمان فرض است ؟
 - آیا پدر شما گاهی زکات مال خود را پرداخته است ؟
 - آیا برای دادن زکات از دارایی تان کدام نصابی وجود دارد ؟
- بعد از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر را می توان بیان کرد.

تعریف

زکات در لغت به معنای پاکی و ازدیاد است و در اصطلاح شرعی عبارت از یک اصل اسلامی است که شخص صاحب نصاب بخش معینی از مال خود را که شریعت امر کرده است به خاطر رضای خداوند عز و جل و ادا کردن فرض به شخص مستحق می پردازد. زکات بنای چهارم اسلام بوده و بر هر مسلمان مالک نصاب تادیه آن فرض است. اساس نصاب زکات در نقود و اموال تجارتي طلا و نقره است، یک مثقال معیاری طلا، 4.25 گرم و یک درهم نقره معادل به 3 گرم است. طوریکه:

گرام	مثقال
4.25 gr	1
x	20

گرام $85 = 20 \times 4.25 = 20$ مثقال طلا
 پس کسی که مالک 85 گرام طلا باشد بعد از سپری شدن یک سال باید زکات آن را
 بپردازد.
 زمانی که دو صد درهم نقره را به گرام تبدیل کنیم معادل به 598 گرام می شود.

$$\left. \begin{array}{cc} \text{گرام} & \text{درهم} \\ 3 & 1 \\ x & 200 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 200}{1} = 600 \text{ گرام}$$

یعنی کسی که مالک دو صد درهم یا 598 گرام نقره و یا قیمت معادل آن باشد باید زکات
 دو صد گرام نقره را که 5 درهم می شود و یا قیمت معادل آن را بپردازد و از طلا نیم مثقال
 یا 2 گرام که 125 ملی گرام و یا قیمت معادل آن را بپردازد.
مثال 1: زکات سرمایه 5000000 افغانی قرار زیر حساب می شود.
حل:

$$\left. \begin{array}{cc} \text{زکات} & \text{سرمایه} \\ 1 & 40 \\ x & 5000000 \end{array} \right\} \Rightarrow 40x = 5000000 \cdot 1$$

$$x = \frac{5000000}{40} = 125000 \text{ افغانی}$$

زکات و فیصد

چنانکه می دانیم زکات سرمایه از هر چهل افغانی یک افغانی حساب می شود. بنابر این در
 فیصد مقدار زکات قرار زیر معین می شود:

$$\left. \begin{array}{cc} \text{زکات} & \text{سرمایه} \\ 2.5 & 100 \\ x & 450000 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{450000 \cdot 2.5}{100} , \quad 11250 \text{ افغانی}$$

مقدار زکات سرمایه به حساب فیصد چند افغانی می شود.

مثال 2: زکات سرمایه 24000 افغانی را از قرار 2.5 فیصد دریافت کنید.

حل: طریقه اول

$$\left. \begin{array}{l} \text{سرمایه} \\ 100 \\ 24000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{زکات} \\ 2.5 \\ x \end{array} \Rightarrow x = \frac{24000 \cdot 2.5}{100}, \quad x = 600 \text{ افغانی}$$

طریقه دوم: مقدار سرمایه را تقسیم عدد 40 می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \text{سرمایه} \\ 40 \\ 24000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{زکات} \\ 1 \\ x \end{array} \Rightarrow \frac{40}{24000} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{24000}{40} = 600 \text{ افغانی}$$

مثال 3: محمد ابراهیم دارای یک مقدار طلا معادل به 360000 افغانی و 50000 افغانی

پول نقد می باشد. بعد از سپری شدن یک سال چقدر زکات دارایی خود را بپردازد؟

حل:

$$360000 AF = \text{قیمت طلا}$$

$$50000 AF = \text{پول نقد}$$

$$\text{افغانی } 410000 = 360000 + 50000 = \text{مجموع پول}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{سرمایه} \\ 40 \\ 410000 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{زکات} \\ 1 \\ x \end{array} \Rightarrow x = \frac{410000}{40} = 10250 \text{ افغانی}$$

مثال 4: عبدالباری در سال 1388 به اندازه 745 افغانی زکات پول خویش را داده بود،

دریافت نمایید که مقدار سرمایه آن چقدر بود؟

حل:

$$\left. \begin{array}{cc} \text{سرمایه} & \text{زکات} \\ 100 & 2.5 \\ x & 745 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{100}{x} = \frac{2.5}{745} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 745}{2.5} = \frac{74500}{2.5}$$

$$x = 29800 \text{ AF}$$

تمرین

- 1 - زکات سرمایه 7518000 افغانی را بعد از سپری شدن یک سال محاسبه کنید.
- 2 - اگر شخصی اندازه زکات سرمایه خود را 6520 افغانی محاسبه کرده باشد، سرمایه وی را دریافت کنید.



- بعضی اوقات به مغازه ها رفته و این
اعلانات را دیده یا شنیده باشید.
- 10% تخفیف در قیمت لباس های بهاری.
 - 50% تخفیف در فروش سیم کارت.
 - 15% تخفیف در دیگر اجناس.

فعالیت

یک شاگرد برای خرید کتاب داستان، به کتاب فروشی مراجعه می کند. قیمت کتاب 60 افغانی است و شاگرد مذکور 55 افغانی دارد. کتاب فروش کتاب مورد نظر را به 55 افغانی بالای آن شاگرد به فروش می رساند.

- شاگرد کتاب را چند افغانی ارزانتر از قیمت اصلی آن خریداری نموده است؟
- چند فیصد پول کتاب را از قیمت اصلی آن کمتر پرداخته است؟
- حاصل ضرب این فیصد، در قیمت اصلی کتاب تقسیم 100 چه عددی را نشان می دهد؟

پس می توان گفت: همان اندازه یی که شاگرد کتاب را از قیمت اصلی آن خریده است تخفیف کتاب نامیده می شود.

مثال 1: ماشین آب میوه یی که به 4000 افغانی خریده شده است، با تخفیف 8% به فروش می رسد. قیمت فروش ماشین را معلوم کنید.

حل:

تخفیف	قیمت
8	100
x	4000

$$\text{افغانی} = 4000 \times \frac{8}{100} = 40 \times 8 = 320$$

$$3680 \text{ افغانی} = 4000 - 320 = \text{قیمت فروش}$$

مثال 2: شخصی یک جنس را که قیمت اصلی آن 3000 افغانی است، بعد از تخفیف به 2895 افغانی خرید، معلوم کنید که خریدار چند فیصد تخفیف گرفته است؟

حل: نخست تمام تخفیف را به دست می آوریم:

$$\text{افغانی } 105 = 3000 - 2895 \text{ تمام تخفیف}$$

تمام تخفیف 105 افغانی است. حالا به کمک تناسب تخفیف آن را در 100 افغانی معلوم می کنیم.

تخفیف	قیمت
105	3000
x	100

$$\text{تخفیف} = 100 \times \frac{105}{3000} = \frac{10500}{3000} = 3.5\%$$

$$\text{تخفیف} = 3.5\%$$

تعریف

پولی را که تاجران برای مشتریان خویش از حیث رقابت و جلب مشتری، از قیمت اصلی آن کم می نمایند به نام تخفیف یاد می شود. تخفیف را از روی صد، نظر به قیمت اصلی به نام تخفیف فیصدی یاد می کند.

تمرین

- 1- قیمت اصلی یک بایسکل 5000 افغانی است. هرگاه فروشنده به مشتری خویش 2% تخفیف قایل شده باشد قیمت فعلی بایسکل را معلوم کنید.
- 2- قیمت اصلی یک بخاری گازی 8000 افغانی است، به خاطر ضرورت دکاندار آن را به قیمت 7600 افغانی به فروش می رساند. تخفیف و فیصدی تخفیف آن را معلوم کنید.
- 3- قیمت یک جاروب برقی 5730 افغانی است و به تخفیف 3% به فروش میرسد. قیمت فروش را معلوم کنید.

• نسبت

نسبت بین دو کمیت و یا مقدار همجنس عبارت از عددی است که نشان می دهد کمیت اول چند برابر کمیت دوم و یا کمیت دوم چند مرتبه شامل کمیت اول است. یا یک کمیت چندم حصه کمیت دیگر است.

• تقسیم به اجزای متناسبه

برای تقسیم کردن یک عدد به نسبت های داده شده نخست حاصل جمع نسبت های داده شده را به دست می آوریم و بعد از آن عدد مفروض را به این مجموعه تقسیم نموده و خارج قسمت حاصله را ضرب هر یکی از نسبت های داده شده می نماییم. اعدادی که حاصل می شوند حاصل تقسیم عدد مورد نظر به نسبت های داده شده اند.

• تناسب

مساوات دو نسبت را تناسب گویند.

• خواص تناسب

-1

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

-2

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

-3

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

-4

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

-5

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

-6

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

-7

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}$$

-8

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

• اقسام تناسب

- تناسب دو نوع است: اول: تناسب مستقیم و دوم تناسب معکوس
- 1- اگر در یک تناسب یک مقدار کم گردد و در مقابل مقدار دوم نیز کم شود و یا یک مقدار زیاد شود در مقابل مقدار دوم نیز زیاد شود این تناسب را تناسب مستقیم گویند.
 - 2- اگر در یک تناسب یک مقدار زیاد و در مقابل مقدار دوم کم و یا برعکس یک مقدار کم و در مقابل مقدار دوم زیاد شود این تناسب، تناسب معکوس است.

• فیصد

فیصد طرز ارائه‌ی است برای کسرهایی که مخرج آن 100 باشند.

• احدیت

احدیت عبارت از دریافت قیمت یک واحد از قیمت یک مجموعه است.

• زکات

در لغت به معنای پاکی و ازدیاد است و در اصطلاح شرعی عبارت از بنای چهارم اسلام است که شخص صاحب نصاب بخشی از مال خود را که شریعت امر کرده است به خاطر رضای خدا ﷻ و به جا کردن اوامر او برای شخص مستحق می‌پردازد.

• تخفیف

پولی را که تاجران برای مشتریان خویش از حیث رقابت و جلب مشتری از قیمت اصلی آن کم می‌نمایند، به نام تخفیف یاد می‌شود.

• در زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، دور جواب صحیح را حلقه بکشید.

1- حاصل نسبت عبارت است از یک عددی که:

(a) منفی باشد (b) مثبت باشد (c) بدون واحد باشد (d) هیچکدام

2- علامه فیصد عبارت است از:

(a) $\times$ (b) $\div$ (c) $+$ (d) $\%$

• جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید:

1- در هر تناسب صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام و مخرج

نسبت اول و صورت نسبت دوم را به نام یاد می کنند.

2- در تناسب مستقیم هر دو مقدار هم زمان یا می شوند.

3- کسری که مخرج آن است به نام یاد می شود.

• در زیر یک تعداد جملات داده شده اند در مقابل جمله صحیح حرف (ص) و در مقابل

جمله غلط حرف (غ) بگذارید:

1- () در یک تناسب صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام طرفین، مخرج

نسبت اول و صورت نسبت دوم را به نام وسطین تناسب یاد می کنند.

2- () فیصد کسری است که مخرج آن 100 باشد.

3- () تخفیف تناسب مستقیمی است که نخست قیمت یک واحد آن را از نسبت مربوطه

دریافته؛ سپس ضرب مقدار داده شده می نماییم.

4- () مساوات دو تناسب را نسبت گویند.

سؤال های زیر را حل کنید:

1- تعداد شاگردان دو مکتب به ترتیب 720 و 810 نفر اند. نسبت بین شاگردان هر دو

مکتب را به دست آورید.

2- در یک باغ 45 اصله درخت سیب، 30 اصله درخت ناک و 75 اصله درخت انار است.

نسبت بین دو نوع درخت را پیدا کنید.

3- برای خریدن سه متر تکه، 33.75 افغانی ضرورت است. برای خریدن 15 متر تکه چند افغانی به کار خواهد بود؟

4- یک رستوران را 27 نفر در 20 روز اعمار می کنند، اگر بخواهیم این رستوران در 15 روز اعمار گردد چند نفر لازم است؟

5- تعداد داخله در یک صنف لیسه عالی ملالی 50 نفر اند. معلم می خواهد آن ها را به دو گروه طوری تقسیم کند که نسبت بین آن ها $\frac{2}{3}$ شود، تعداد هر گروه را معلوم کنید.

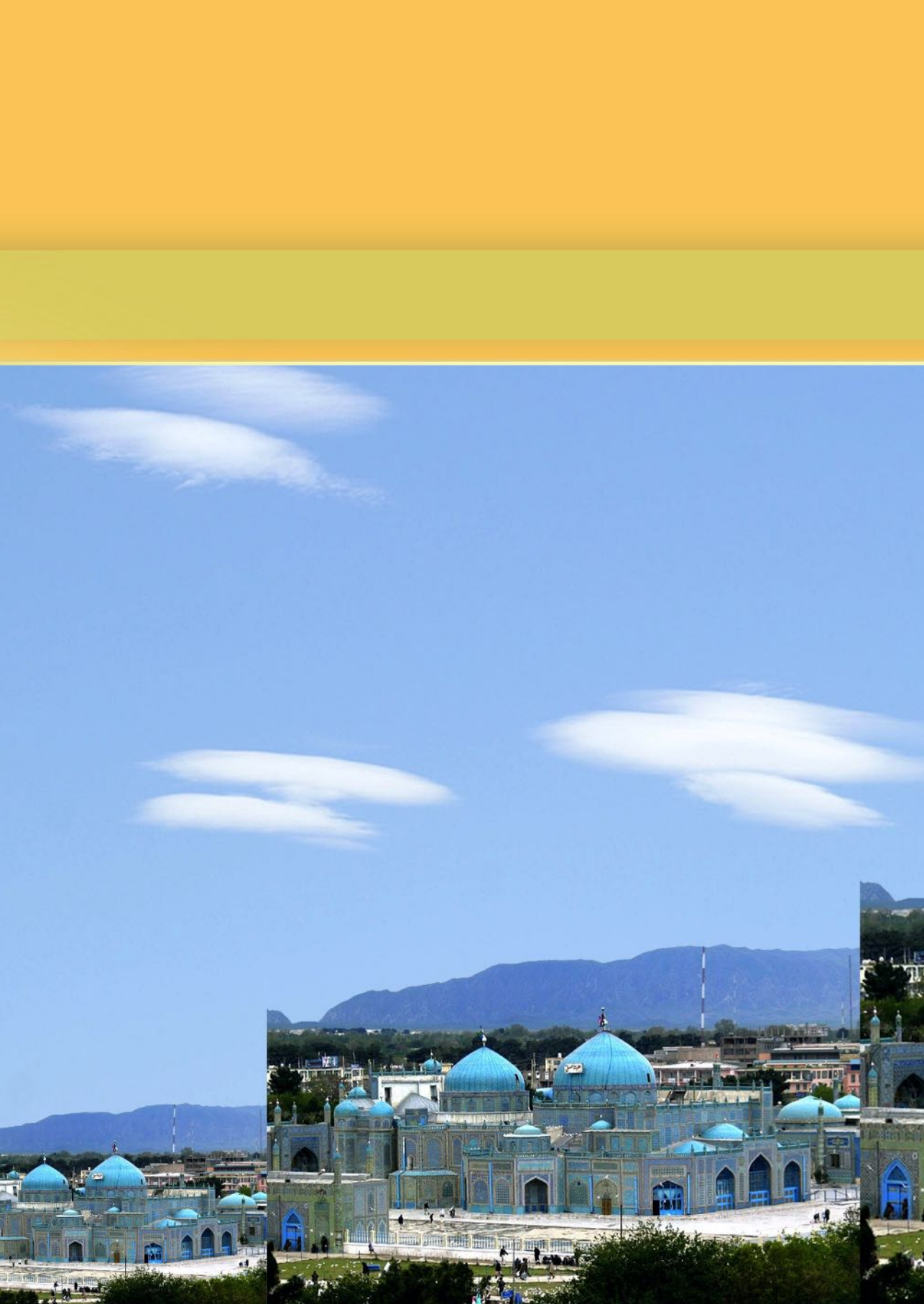
6- اداره یک لیسه از یک کتاب فروشی به مبلغ 2560 افغانی کتاب خریداری نموده است. برای اینکه کتاب فروش خریدار مذکور را برای آینده مشتری خود بسازد. 5 فیصد پول کمتر از قیمت اصلی آن اخذ می کند معلوم کنید که اداره لیسه چند افغانی به کتاب فروش داده است؟

7- مجموعه سرمایه های دو تاجر که مشترکاً با هم تجارت می کنند 2540000 افغانی و نسبت سرمایه های آنها $\frac{3}{5}$ است. سرمایه هر کدام آن ها را معلوم کنید.

فصل سوم

مشابهت ها





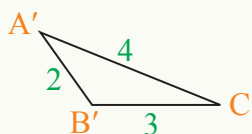
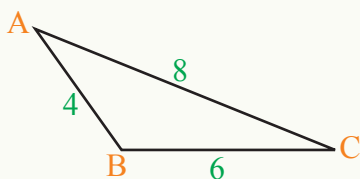
اشکال متشابه



آیا اشکال همانند را به اندازه های مختلف دیده اید؟
در اطراف ما اشکالی وجود دارند که اندازه های شان مساوی نبوده؛ اما هم شکل می باشند؛ مثلاً: تصویر تاق ظفر پغمان که یکی از آن ها بزرگ و دیگری کوچک است؛ ولی از نظر شکل باهم مشابه اند.

فعالیت

دو مثلث زیر را در نظر بگیرید:

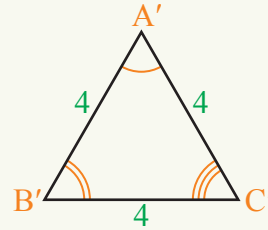
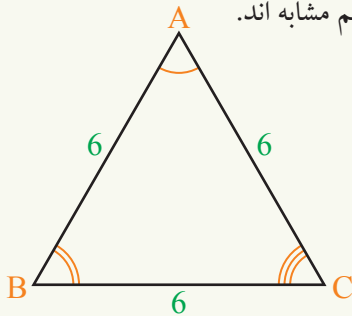


- آیا فکر می کنید این دو مثلث با هم مشابه اند؟
- اگر فکر می کنید که مثلث ها با هم مشابه اند، اضلاع متناسب و زاویه های مساوی آن ها را مشخص کنید.
- زاویه های مساوی را توسط نقاله اندازه گرفته و باهم مقایسه کنید.
- نسبت های اضلاع متناسب را حساب نمایید.

فعالیت فوق به ما نشان می دهد که:

در اشکال مشابه زوایای مساوی یک به یک با هم انطباق پذیر اند و نسبت های اضلاع متناسب یک مقدار ثابت بوده که این مقدار ثابت را نسبت تشابه می گویند. هرگاه دو شکل باهم چنین رابطه یی داشته باشند، مشابه اند. اشکال مشابه را به علامه $\sim$ نمایش می دهیم.

مثال: نشان می دهیم که دو مثلث متساوی الاضلاع با هم مشابه اند.



$$\begin{aligned} \hat{A} &\cong \hat{A'}, \hat{B} \cong \hat{B'}, \hat{C} \cong \hat{C'} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} &= \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \triangle ABC &\sim \triangle A'B'C' \end{aligned}$$

حل: زوایا با هم انطباق پذیر اند.

تناسب بین اضلاع وجود دارد.

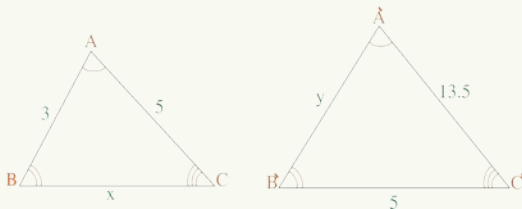
پس:

تمرین

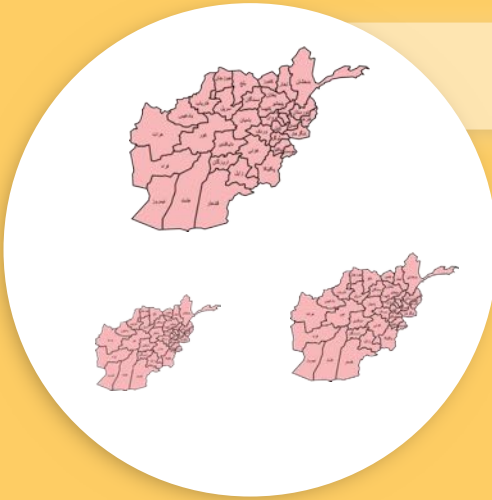
1- کدام یک از جملات زیر همیشه درست نیست، برای هر یک مثال دهید.

- دو مربع همیشه باهم مشابه اند.
- دو مثلث همیشه باهم مشابه اند.
- دو مستطیل همیشه باهم مشابه اند.
- دو مثلث متساوی الساقین همیشه باهم مشابه اند.
- دو لوزی همیشه باهم مشابه اند.

2- مثلث های ABC و $A'B'C'$ متشابه اند. زوایای آن ها مشخص شده است. نسبت بین اضلاع مقابل آن ها را بنویسید و سپس طول های x و y را تعیین کنید.

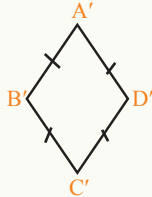
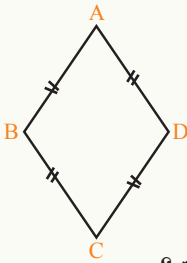


آیا این دو نقشه زیر نظر به نقشه اولی به یک اندازه کوچک شده‌اند؟



فعالیت

با اندازه گیری اضلاع هر یک از نسبت های زیر را دریافت کنید.



$$\frac{AB}{A'B'} = \square$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \square$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \square$$

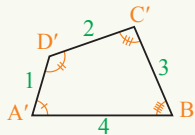
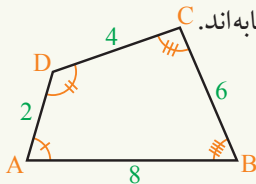
$$\frac{AD}{A'D'} = \square$$

- اضلاع لوزی ABCD بالترتیب چند برابر اضلاع لوزی A'B'C'D' است؟
- زاوایای ABCD و A'B'C'D' را اندازه بگیرید. چه چیزی مشاهده می کنید؟

از فعالیت فوق دیدیم که نسبت اضلاع متناسب در دو شکل همواره ثابت و باهم مساوی می باشند. وزاویه های مساوی هم با هم مساوی اند. پس دو شکل با هم مشابه اند.
چند ضلعی ها در صورتی با هم مشابه اند که دارای خواص زیر باشند:

- 1- تعداد رأس های شان با هم مساوی باشند.
- 2- تمام زوایا در مضلعات مشابه باید یک به یک با هم انطباق پذیر باشند.
- 3- اضلاعی که در مقابل زوایای مساوی قرار دارند باهم متناسب باشند.

مثال: نشان می دهیم که دو مضلع ABCD و A'B'C'D' با هم مشابه اند.



حل: در شکل دیده می شود که:

$$\hat{A} \cong \hat{A'}, \hat{B} \cong \hat{B'}, \hat{C} \cong \hat{C'}, \hat{D} \cong \hat{D'}$$

1- زاوایا با هم انطباق پذیر اند.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} = 2$$

2- تناسب بین اضلاع وجود دارد.

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$$

پس دو شکل با هم مشابه اند.

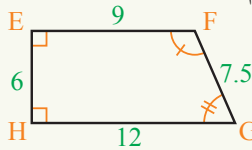
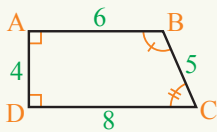
در مثال فوق نسبت تشابه بین اضلاع 2 می باشد. یعنی اضلاع مضلع ABCD دو برابر اضلاع

مضلع A'B'C'D' می باشد، پس $ABCD \sim A'B'C'D'$

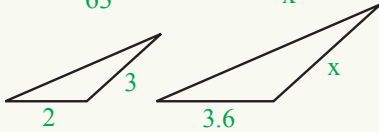
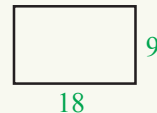
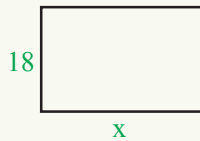
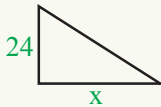
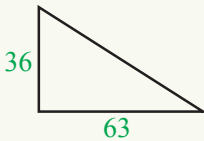
سؤال: اضلاع A'B'C'D' چند برابر اضلاع ABCD است؟

تمرین

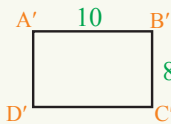
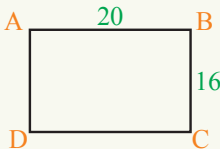
1- نشان دهید که اشکال زیر با هم مشابه اند.



2- هر جوره اشکالی که در کنار هم رسم شده باهم مشابه اند، طول مجهولی که با حرف x نشانی شده حساب کنید.



3- در شکل زیر نشان دهید که در دو مستطیل مشابه نسبت طول بر عرض یک مستطیل مساوی به نسبت طول بر عرض مستطیل دومی، می باشد.





خطوط موازی با فاصله های مساوی

فاصله خطوطی که عرض خط ریل را باهم وصل کرده اند، باهم چه رابطه دارند؟

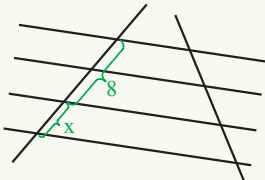
فعالیت

- چهار خط موازی روبرو را در نظر بگیرید.
- خط عمودی بر این چهار قطعه خط رسم کنید.
- قطعه خط های که بین خطوط موازی توسط خط قاطع ایجاد شده اندازه بگیرید.
- یک خط مستقیم دیگر رسم کنید که این چهار خط موازی را قطع کنند.
- قطعه خط هایی که توسط این خط قاطع و خطوط موازی به دست آمده اندازه بگیرید و بگویید باهم چه رابطه دارند؟

از فعالیت فوق می توان تعریف زیر را بیان نماییم:

تعریف

اگر چند خط موازی که فاصله ها بین شان با هم مساوی باشند توسط یک خط مستقیم قاطع قطع گردند، روی خط قاطع قطعات مساوی را جدا می کنند.
مثال: در شکل زیر خطوط موازی به فاصله های مساوی داده شده اند، فاصله x را به دست آورید.



حل: چون مجموع دو قطعه ایجاد شده خط قاطع بین خطوط موازی دو برابر (8 واحد) است؛ پس طول هر قطعه چهار واحد می شود.
 چون x برابر هر یک از این قطعات است پس: $x = 4$

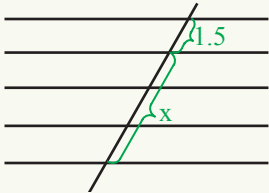
فعالیت

- 1- قطعه خط کیفی AB را رسم کنید.
- 2- از نقطه A یک نیم خط کیفی AX را رسم کنید.
- 3- روی نیم خط AX از نقطه A شروع کرده و 5 واحد مساوی بی هم جدا کنید. این نقاط را M, P, N, Q و C بنامید.
- 4- نقطه C را به B وصل کنید.
- 5- حال از نقاط M, P, N, Q خطوط موازی به خط مستقیم $\overline{BC}$ رسم کنید.
- 6- پنج قطعه خطوط ایجاد شده چه رابطه‌ی با هم دارند؟

از خاصیت خطوط موازی با فاصله‌های مساوی برای تقسیم یک قطعه خط به قسمت‌های مساوی می‌توان استفاده کرد.

تمرین

- 1- در هر یک از اشکال زیر خطوط موازی به فاصله‌های مساوی داده شده‌اند، قیمت x را به دست آورید.



- 2- دو قطعه خط را رسم کنید؛ سپس یکی از آن‌ها را به سه قسمت و دیگری را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید.
- 3- قطعه خطی را به طول 12cm رسم نموده، بعد آن را به 8 قسمت مساوی تقسیم کنید.

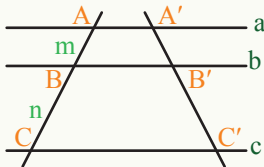


قضیه تالس (Thales)

تعمیری را که در شکل می بینید چند طبقه دارد؟
آیا فاصله طبقات با هم مساوی اند؟

فعالیت

- سه خط مستقیم موازی a ، b و c را طوری رسم کنید که هم فاصله نباشند.
- دو قاطع (یک دیگر خود را قطع نکنند) را رسم کنید که خطوط موازی آن ها را به ترتیب در نقاط A ، B ، C و A' ، B' ، C' قطع کنند.
- نسبت های زیر را دریافت کنید.

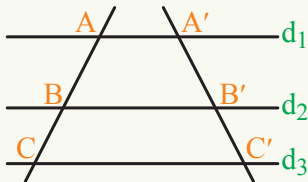


$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = ?$$

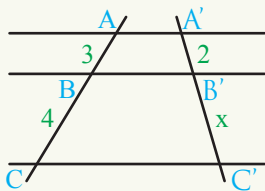
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = ?$$

- قاطع کیفی دیگری را رسم نموده و نسبت قطعات ایجاد شده را دریافت کنید.

تالس ریاضی دان یونان (548 - 624 قبل از میلاد) نتیجه فعالیت فوق را به شکل زیر بیان کرد.
قضیه تالس: هرگاه دو یا چندین قطعه خط موازی توسط دو خط قاطع قطع گردند، روی آن ها قطعات متناسب جدا می کنند.
طبق شکل مقابل d_1 ، d_2 و d_3 سه خطوط مستقیم موازی اند.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \quad \text{پس}$$



مثال: در شکل زیر قیمت x را حساب کنید.

حل:

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{x}$$

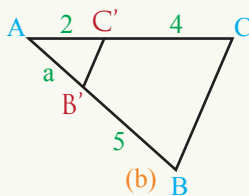
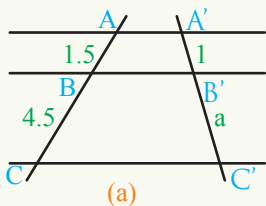
$$x = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

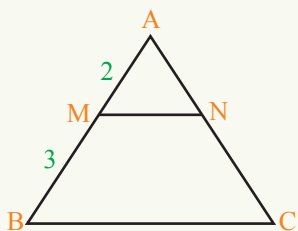
$$x = \frac{8}{3}$$

تمرین

1- در هر یک از اشکال زیر قیمت a را دریافت کنید.



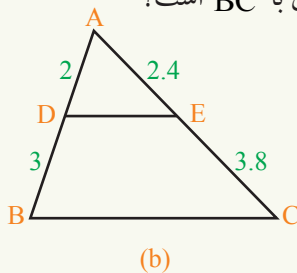
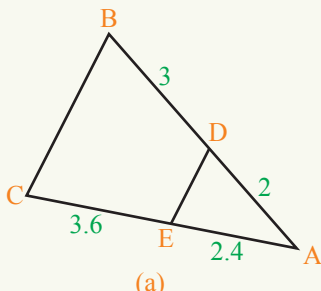
2- شکل زیر را در نظر گرفته نسبت های داده شده را بنویسید.



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = ?$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = ?$$

3- با در نظر داشت قیمت های داده شده و تطبیق قضیه تالس بگویید در کدام شکل زیر $\overline{DE}$ موازی با $\overline{BC}$ است؟



- 1- اشکال متشابه عبارت از اشکالی اند که هم شکل بوده؛ اما ضروری نیست که اندازه هایشان باهم مساوی باشند.
- 2- مضلعات وقتی با هم متشابه اند که دارای خواص زیر باشند:
 - a) تمام زوایای مضلعات مشابه باید یک به یک با هم انطباق پذیر باشند.
 - b) اضلاع مقابل زوایای مساوی با هم متناسب باشند.
- 3- هرگاه خطوط موازی به فاصله های مساوی و قاطع را بالای آن ها در نظر بگیریم در این صورت یک قطعه خط را به قطعات مساوی تقسیم کرده می توانیم.
- 4- با استفاده از خطوط موازی با فاصله مساوی، یک قطعه خط را به قطعات مساوی تقسیم کرده می توانیم.
- 5- اگر چند قطعه خط موازی که فاصله ها بین شان مساوی باشند توسط یک قاطع قطع گردند بر روی خط قاطع قطعات مساوی را جدا می کنند.

• سؤال های زیر را به دقت مطالعه کنید. برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، جواب درست را انتخاب نموده و دور آن را حلقه کنید.

1- یک مثلث متساوی الاضلاع مشابه است با:

- (a) مثلث مختلف الاضلاع
(b) مثلث متساوی الاضلاع
(c) مثلث متساوی الساقین
(d) هیچکدام

2- تمام چهار ضلعی های متساوی الزوایا باهم:

(a) مشابه اند (b) انطباق پذیراند (c) متوازی الاضلاع اند (d) هیچکدام

3- مثلث های ABC و DEF باهم مشابه اند. هرگاه $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ بوده و $\overline{AC} = 12\text{cm}$, $\overline{AB} = 9\text{cm}$ و $\overline{DE} = 3\text{cm}$ باشند، در این صورت طول $\overline{DF}$ عبارت

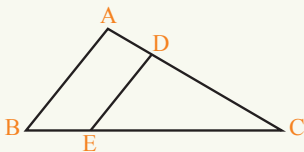
است از:

(a) 3cm (b) 4cm

(c) 6 cm (d) 7cm

4- در شکل زیر $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ و $\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{5}{2}$ است نسبت $\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$ عبارت است از:

- (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$



فصل چہارم

تناظر



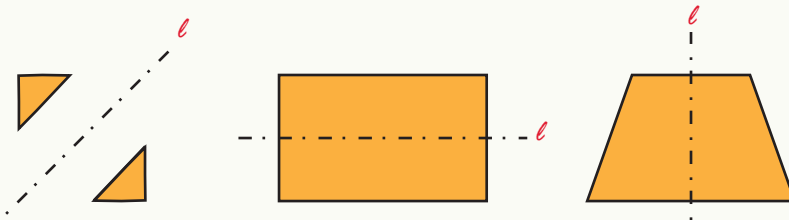




آیا تا به حال فکر کرده‌اید که در طبیعت اطراف ما چقدر اشکال متناظر وجود دارند؟

فعالیت

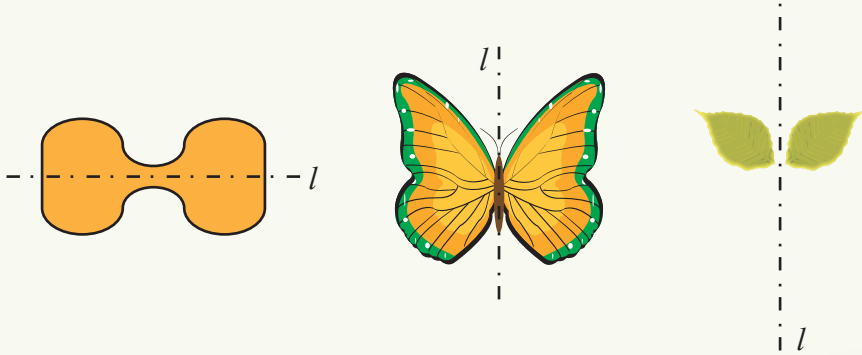
به شکل‌های زیر توجه کنید:



- اگر اشکال فوق را در امتداد خط‌ها تقسیم کنیم چه مشاهده می‌شود؟
- آیا می‌توان گفت که دو قسمت شکل که در دو طرف خط‌ها قرار می‌گیرند، انطباق پذیر هستند؟
- آیا می‌توان روی اشکال فوق خط دیگری رسم کرد که اگر روی آن، شکل را تقسیم کنیم یکی بالای دیگری منطبق شود؟

از فعالیت فوق مشاهده می‌شود که بعضی از اشکال دارای این خاصیت هستند که اگر آن‌ها را در امتداد یک خط مستقیم تقسیم کنیم دو قسمت شکل باهم دیگر منطبق می‌شوند. در این حالت می‌گوییم دو قسمت شکل متناظر یکدیگر نظر به خط‌ها اند. اگر با قات کردن یک شکل به امتداد خط مستقیم دو قسمت با همدیگر منطبق شوند آن شکل را نسبت به خط مستقیم متناظر گویند و خطی که روی آن شکل قات شده، محور تناظر نامیده می‌شود.

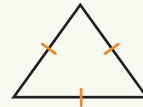
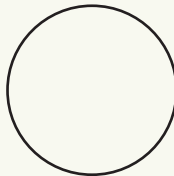
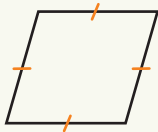
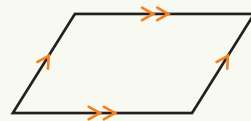
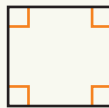
مثال: اشکال زیر نسبت به خط l (محور تناظر) متناظر هستند:



تمرین

محور تناظر هر یک از اشکال زیر را در صورت موجودیت رسم کنید و بگویید که هر کدام از این اشکال چند محور تناظر دارند و نیز جدول زیر را تکمیل کنید.

شکل	مستطیل	مربع	متوازی الاضلاع	لوزی	دایره	مثلث های متساوی الاضلاع
تعداد محور های تناظر						





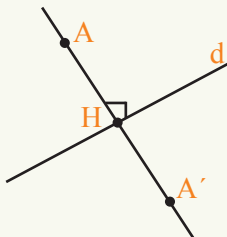
تناظر محوری

بسیاری از موجودات که خداوند (ج) خلق کرده اند متناظر اند، آیا می توانید نمونه های دیگری از اشکال متناظر را در طبیعت نام ببرید؟

فعالیت

- $A \bullet$ d
- خط مستقیم d و نقطه A را خارج آن مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید.
- از نقطه A مستقیم عمودی بالای خط d رسم کنید.
 - نقطه تقاطع آن را H نام گذاری کنید.
 - AH را به اندازه خودش امتداد دهید. تا نقطه A' به دست آید.
 - آیا $AH = A'H$ است. چرا؟
 - آیا $A'H \perp d$ است. چرا؟
 - آیا می توان نتیجه گرفت که خط d ناصف عمودی AA' است؟

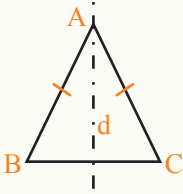
تعریف



نقطه A' را متناظر نقطه A نسبت به خط d می نامیم اگر خط d ناصف عمودی قطعه خط واصل بین A و A' باشد؛ مانند شکل مقابل.

تناظر محوری هر شکل هندسی شکلیست که هر نقطه آن نظر به یک نقطه شکل اولی متناظر می باشد.

فعالیت



در مثلث متساوی الساقین ABC خط d ناصف عمودی قاعده BC است.

• اگر مثلث را روی خط d قات کنیم آیا دو قسمت مثلث با همدیگر منطبق می شوند؟

• یک نقطه مانند P را روی ضلع AB انتخاب کنید.

• از نقطه P بالای خط d عمود رسم کنید و انجام آن را H نام گذاری کنید. آن را امتداد دهید تا AC را در P' قطع کند.

• آیا می توان نتیجه گرفت که $PH = P'H$ است؟ چرا؟

• آیا می توان نتیجه گرفت که خط d ناصف عمودی PP' است؟ چرا؟

• نقطه مانند Q را روی ضلع AC انتخاب کنید و مراحل فوق را تکرار کنید.

از فعالیت فوق نتیجه می شود که متناظر هر نقطه ضلع AB نظر به محور تناظر d بالای ضلع AC قرار دارد.

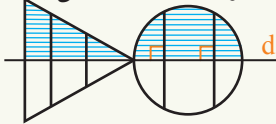
اگر شکلی نسبت به یک خط متناظر باشد، محور تناظر آن شکل ناصف عمودی قطعه خط های واصل نقاط متناظر روی شکل است.



مثال: متناظر شکل داده شده را نسبت به خط d به دست آورید.

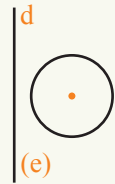
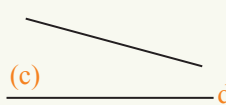
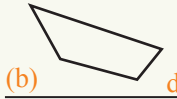
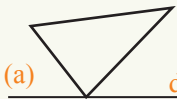
حل: با در نظر داشت اینکه محور تناظر ناصف عمودی

قطعه خط های واصل بین نقاط متناظر است، پس کافی است از هر نقطه روی شکل به d عمود رسم کنیم به اندازه خودش امتداد دهیم. از وصل کردن نقاط به دست آمده متناظر شکل به دست می آید.



تمرین

متناظر هر شکل را نسبت به خط d رسم کنید.



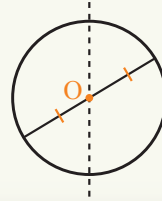
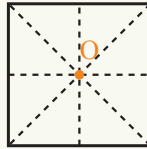
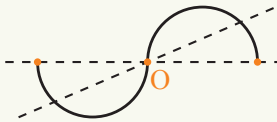
تناظر مرکزی



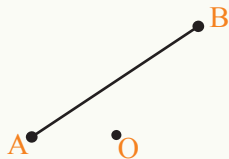
آیا تناظر در چرخک را مشاهده می‌نمایید؟

نقطه A' را متناظر نقطه A نسبت به نقطه O می‌نامیم اگر نقطه O وسط قطعه خط AA' باشد. در این حالت O را مرکز تناظر نامیده و می‌گوییم نقاط A و A' نسبت به نقطه O متناظر اند. همچنین اگر S یک مجموعه نقاط و O یک نقطه باشد اگر متناظر هر نقطه S نظر به O روی S باشد، می‌گوییم S نظر به نقطه O متناظر است، در این حالت O مرکز تناظر S است. و S تناظر مرکزی دارد.

مثال: شکل‌های زیر نسبت به نقطه O متناظر هستند:



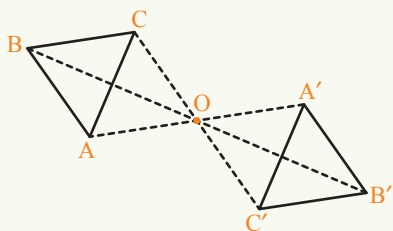
فعالیت



- قطعه خط AB و نقطه O را مطابق شکل در نظر بگیرید.
- نقطه A را به نقطه O وصل کنید و به اندازه خودش امتداد دهید.
- انجام آن را A' بنامید.
- آیا A' متناظر نقطه A نسبت به نقطه O است؟
- نقطه B را به نقطه O وصل کنید و به اندازه خودش امتداد دهید و انجام آن را B' بنامید.
- آیا نقطه B' متناظر نقطه B نسبت به نقطه O است؟

- نقطه دلخواه P را روی قطعه خط AB انتخاب کنید.
- نقطه P را به O وصل نموده به اندازه خودش امتداد دهید. انجام آن را P' نام گذاری کنید.
- آیا نقطه P' روی قطعه خط $A'B'$ قرار می گیرد؟
- آیا قطعه خط $A'B'$ متناظر قطعه خط AB نسبت به نقطه O است؟

برای دریافت متناظر یک شکل نسبت به یک نقطه O کافی است هر نقطه شکل را به نقطه O وصل نموده و به اندازه خودش امتداد دهیم. از وصل کردن نقاط حاصله شکل متناظر شکل داده شده به دست می آید.

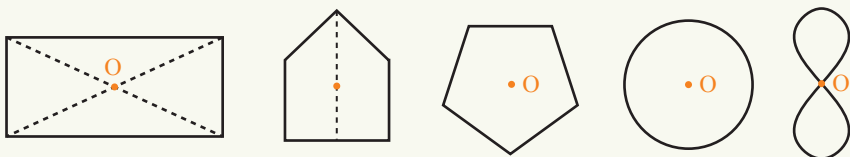


مثال: در شکل مقابل مثلث $A'B'C'$ متناظر مثلث ABC نظر به نقطه O است.

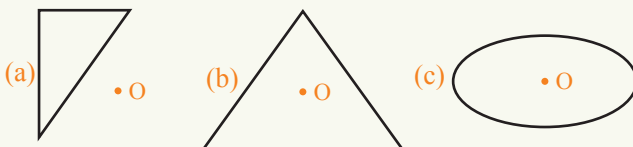
سؤال: متناظر زاویه ABC را نظر به نقطه O به دست آورید؟

تمرین

1- در کدام یک از اشکال زیر نقطه O مرکز تناظر است:



2- متناظر شکل های زیر را نسبت به نقطه O رسم کنید:



• مفهوم تناظر و محور تناظر

اگر با قات یک شکل به امتداد یک خط مستقیم دو قسمت شکل با هم منطبق شوند آن شکل را متناظر گویند. خطی که روی آن شکل قات شده است محور تناظر نامیده می شود.

• تناظر محوری

نقطه A' را متناظر نقطه A نسبت به خط مستقیم d می نامیم اگر خط d ناصف عمودی قطعه خط واصل بین نقاط A و A' باشد.

• اگر نقطه A روی خط مستقیم d باشد، متناظر آن نسبت به خط مستقیم d خود آن نقطه است.

• اگر شکلی نسبت به یک خط مستقیم متناظر باشد، محور تناظر آن شکل ناصف عمودی قطعه خط های واصل بین نقاط متناظر روی شکل است.

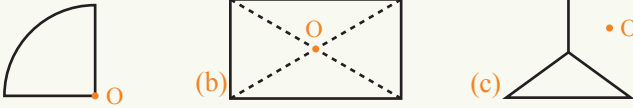
• تناظر مرکزی

اگر S یک مجموعه نقاط و O یک نقطه باشد، اگر متناظر هر نقطه S نظر به نقطه O باز هم روی S باشد. در این صورت می گوییم مجموعه نقاط S نظر به نقطه O متناظر اند، در این حالت O مرکز تناظر S است و S تناظر مرکزی دارد.

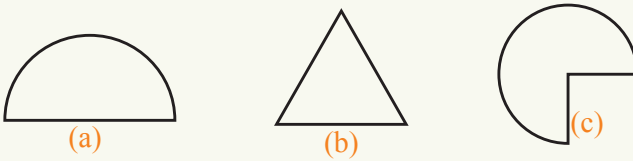
تمرینات عمومی

سؤال های زیر را حل کنید:

1- متناظر هر شکل را نسبت به نقطه O رسم کنید.



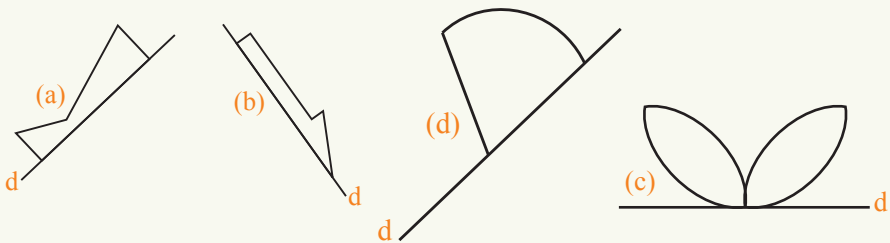
2- محور تناظر هر شکل را رسم کنید:



3- شکل هایی را که مرکز تناظر دارند مشخص کنید، سپس مرکز تناظر را روی هر شکل نشان دهید:



4- متناظر هر شکل را نسبت به خط d دریافت کنید:



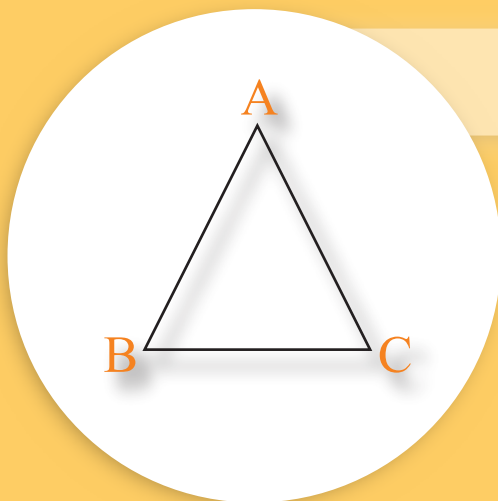


فصل پنجم

قضایای مثلث



قضایای مثلث متساوی الساقین



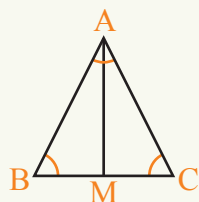
اضلاع مثلث ABC را اندازه بگیرید.
این مثلث چه نوع مثلث است؟
چه رابطه بین اندازه زوایه‌های این
مثلث وجود دارد؟

فعالیت

- مثلث متساوی الساقین ABC را طوری رسم کنید که در آن $\overline{AB} = \overline{AC}$ باشد.
- در مثلث متساوی الساقین ABC اضلاع مساوی چه نامیده می‌شوند؟
زاویه‌های مقابل اضلاع مساوی را به کمک نقاله اندازه‌گیری نموده چه رابطه بین این دو زاویه می‌بینید.
- یک مثلث متساوی الساقین را رسم کنید. عملیه فوق را تکرار نموده چه نتیجه می‌گیرید؟

از فعالیت فوق مشاهده می‌شود که در مثلث‌های متساوی الساقین زاویه‌های مقابل ساق‌ها باهم مساوی‌اند. این مطلب را به شکل قضیه زیر می‌توان بیان نمود:
قضیه: اگر دو ضلع یک مثلث باهم مساوی باشند. زوایای مقابل آن دو ضلع نیز باهم مساوی‌اند.

ثبوت: در مثلث ABC فرض می‌کنیم $\overline{AB} = \overline{AC}$ است نقطه وسط ضلع BC را M نامگذاری نموده میانه AM را رسم می‌کنیم.
در دو مثلث ABM و ACM داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \text{ قرار فرضیه} \\ \overline{BM} = \overline{CM} \text{ (نقطه وسطی BC)} \\ \overline{AM} = \overline{AM} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACM$$

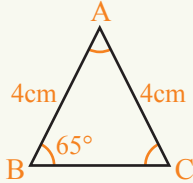
با در نظر داشت تساوی سه ضلع، نتیجه می‌شود که مثلث‌های ABM و ACM انطباق‌پذیراند؛ بنا براین همه زوایای آن‌ها نیز یک به یک باهم مساوی می‌باشند.

در نتیجه: $\hat{B} = \hat{C}$

معکوس قضیه فوق را چنین بیان می کنیم:

قضیه: اگر دو زاویه یک مثلث با هم مساوی باشند، اضلاع مقابل زوایای مذکور باهم مساوی هستند.

مثال 1: در مثلث ABC اگر $\overline{AB} = \overline{AC} = 4\text{cm}$ و $\hat{B} = 52^\circ$ باشند، زاویه $\hat{C}$ چند درجه است؟

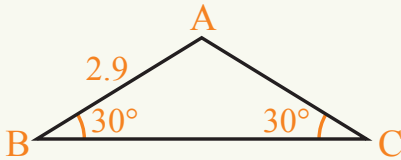


حل: چون $\overline{AB} = \overline{AC}$ است، در مقابل اضلاع مساوی زوایای مساوی قرار دارند، در نتیجه $\hat{B} = \hat{C}$ می شود.

پس: $\hat{C} = 52^\circ$

مثال 2: در شکل زیر $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$

$\overline{AB} = 2.9\text{cm}$ است ضلع AC را معلوم کنید.



حل:

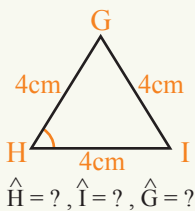
چون: $\hat{B} = \hat{C}$ است، پس مثلث متساوی الساقین است.

در نتیجه، مقابل زوایای مساوی، اضلاع مساوی قرار دارند.

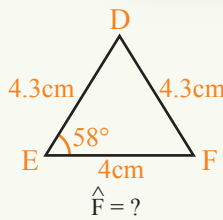
$$\overline{AB} = \overline{AC} = 2.9\text{cm}$$

تمرین

1- در شکل های زیر زوایای نامعلوم را دریافت کنید.

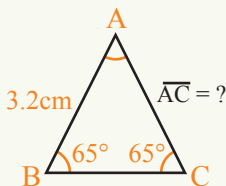


$$\hat{H} = ? , \hat{I} = ? , \hat{G} = ?$$

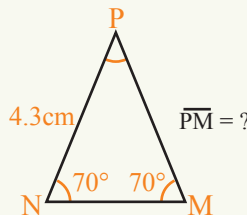


$$\hat{F} = ?$$

2- در شکل های زیر اضلاع نامعلوم را دریافت کنید.



$$\overline{AC} = ?$$

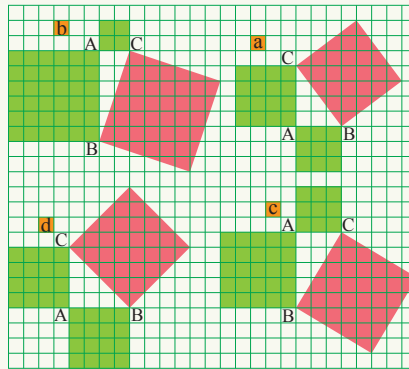


$$\overline{PM} = ?$$

قضیه فیثاغورث Pythagorean theorem



فیثاغورث ریاضی دان مشهور و
فیلسوف یونان باستان بود، که در
سال 530 قبل از میلاد می زیست.



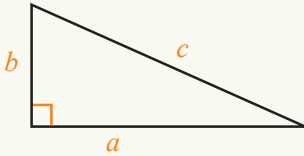
در اشکال فوق مشاهده می شود که مثلث های ABC در رأس A قائم الزاویه اند. مساحت
مربعاتی که توسط اضلاع مثلث ABC تشکیل شده اند. با شمارش تعداد مربعاتی کوچک اندازه
مساحت آن ها را تخمین کنید. مانند نمونه یی که در جدول زیر درج است جزء b , c و d را تکمیل
کنید.

تعداد مربعاتی که بالای ضلع قرار دارند	تعداد مربعاتی که بالای ضلع AC قرار دارند	مجموع مربعاتی که در ضلع و AB قرار دارند	تعداد مربعاتی که روی وتر BC قرار دارند
9	16	25	25
a			40
b			34
c			32
d			

با توجه به اعداد مندرج در جدول چه رابطه بین مساحت مربعات تشکیل شده توسط اضلاع
مثلث های قائم الزاویه مشاهده می کنید؟

قضیه فیثاغورث:

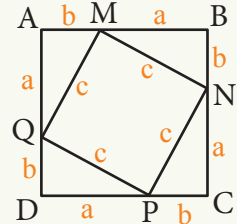
در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساوی با مجموع مربعات اضلاع قائم آن می باشد: $a^2 + b^2 = c^2$



ثبوت: با در نظر داشت شکل زیر می توان نوشت:
نظر به خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع می توان نوشت:

$$\begin{aligned} S_{(ABCD)} &= (a+b)(a+b) \\ &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \dots\dots\dots I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{(ABCD)} &= 4S_{(\triangle AMQ)} + S_{(MNPQ)} \quad \text{از طرف دیگر چون:} \\ &= 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2 \dots\dots\dots II \end{aligned}$$



از تساوی روابط I و II نتیجه می شود:

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$$

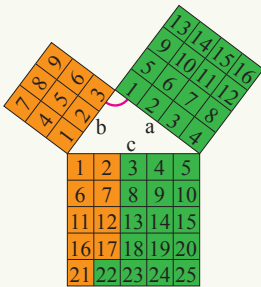
$$\Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

مثال 1: طول اضلاع یک مثلث به ترتیب زیر داده شده اند.

$$a = 4\text{ cm}, b = 3\text{ cm}, c = 5\text{ cm}$$

حل: در شکل دیده می شود که بالای ضلع (a) ، 16 عدد مربع که هر ضلع آن 1cm است.

بالای ضلع قائم (b) ، 9 عدد مربع که هر ضلع آن مساوی به 1cm است و بالای ضلع قائم (c) ، 25 عدد مربع که هر ضلع آن نیز مساوی 1cm است، می باشد.

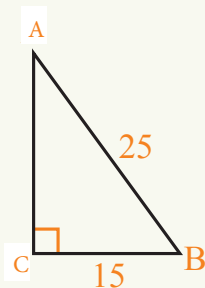


$$25\text{cm}^2 = 16\text{cm}^2 + 9\text{cm}^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

در نتیجه:

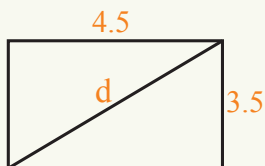
مثال 2: در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ اندازه ضلع AC را حساب کنید.
حل:



$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \\ (25)^2 &= \overline{AC}^2 + (15)^2 \\ 625 &= \overline{AC}^2 + 225 \\ \overline{AC}^2 &= 625 - 225 \\ \overline{AC}^2 &= 400, \quad \overline{AC} = 20\text{cm}\end{aligned}$$

مثال 3: طول قطر مستطیلی با داشتن اضلاع 4.5cm و 3.5cm دریافت کنید.

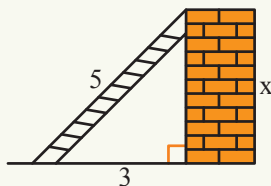
حل: طبق قضیه فیثاغورث اگر طول قطر را d بنامیم؛ داریم:



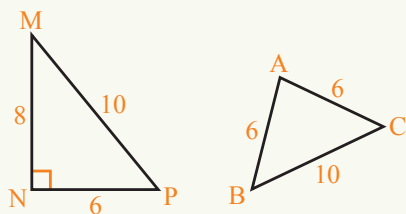
$$\begin{aligned}d^2 &= (4.5\text{cm})^2 + (3.5\text{cm})^2 \\ d^2 &= 20.25\text{cm}^2 + 12.25\text{cm}^2 \\ d^2 &= 32.50\text{cm}^2 \\ \Rightarrow d &= \sqrt{32.50\text{cm}^2}, \quad d \approx 5.7\text{cm}\end{aligned}$$

تمرین

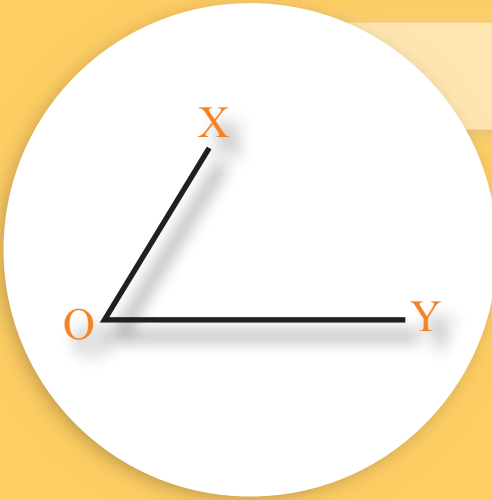
- 1- طول و عرض صنف خود را به متر اندازه کنید. فاصله دو کنج مقابل را اولاً با استفاده از قضیه فیثاغورث، بعداً ذریعه خط کش محاسبه و نتایج را مقایسه کنید.
- 2- در شکل زیر زینه با زمین و دیوار مثلث قائم الزایه را تشکیل نموده اگر طول زینه 5m و طول یک ضلع قائم آن 3m باشد. طول ضلع سوم یعنی x را دریافت کنید.



3- دو مثلث ABC و MNP داده شده‌اند. نشان دهید که کدام یکی آن‌ها مثلث قائم الزاویه است.



ناصف الزاویه



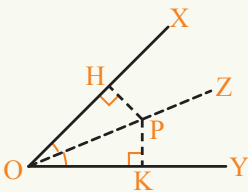
آیا تمام نقاط ناصف الزاویه از دو ضلع همان زاویه متساوی الفاصله اند؟

فعالیت

- ناصف الزاویه $\hat{XOY}$ را رسم کنید و آنرا OZ بنامید.
- یک نقطه کیفی را روی ناصف OZ انتخاب کرده آن را P بنامید.
- از نقطه P بالای دو ضلع زاویه یعنی OX و OY عمودها رسم کنید آن‌ها را HP و KP بنامید.
- طول HP و KP را با خط کش اندازه بگیرید. چه رابطه بین طول این عمودها ملاحظه می‌شود؟

مشاهدات فعالیت فوق را می‌توان طور زیر بیان و ثبوت کرد.

قضیه: هر نقطه روی ناصف الزاویه، از دو ضلع زاویه متساوی الفاصله است.



ثبوت: فرض می‌کنیم OZ ناصف الزاویه YOX باشد، می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\overline{PH} = \overline{PK}$$

در دو مثلث HPO و KPO داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{H} = \hat{K} = 90^\circ \\ \hat{XOZ} = \hat{YOZ} \text{ ، OZ ناصف الزاویه است ،} \\ \overline{OP} = \overline{OP} \text{ ، ضلع مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OPK \cong \triangle OPH$$

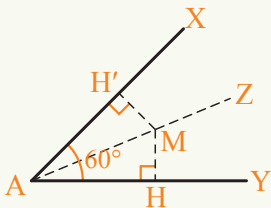
با در نظر داشت تساوی وتر و یک زاویه حاده در دو مثلث قائم الزاویه $\triangle OPH$ و $\triangle OPK$ نتیجه می گیریم که این دو مثلث انطباق پذیر اند بنابراین: $\overline{PK} = \overline{PH}$

معکوس قضیه فوق نیز صحیح است.

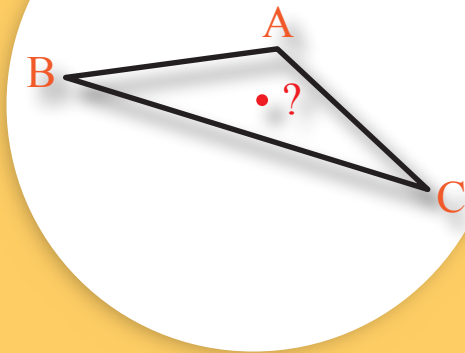
قضیه: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه متساوی الفاصله باشد، آن نقطه روی ناصف آن زاویه قرار دارد.

تمرین

نقطه M روی ناصف الزاویه A قرار داشته، قطعه خط MH' بالای قطعه خط AX عمود است. طول اضلاع مثلث AMH را از جنس اضلاع مربوطه به دست آورید.



ناصف الزاویه‌های داخلی مثلث

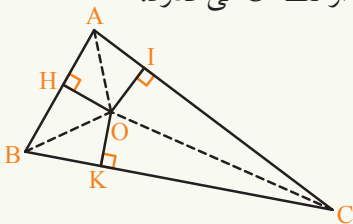


آیا می‌توان نقطه‌ای را در داخل مثلث پیدا نمود که از هر سه ضلع مثلث فاصله‌های مساوی داشته باشد؟

فعالیت

- یک مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
 - ناصف الزاویه‌های داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را طوری رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه‌ای مانند O قطع کنند.
 - ناصف الزاویه داخلی $\hat{A}$ را رسم کنید.
 - آیا ناصف الزاویه $\hat{A}$ نیز از نقطه O می‌گذرد؟
 - یک مثلث کیفی دیگری $A'B'C'$ را رسم کرده، فعالیت فوق را در آن تکرار کنید. مشاهدات فعالیت فوق را می‌توان طور زیر بیان و ثبوت کرد.
- قضیه:** در هر مثلث ناصف الزاویه‌های داخلی یکدیگر را در یک نقطه داخل مثلث قطع می‌کنند.

ثبوت: در مثلث ABC فرض می‌کنیم ناصف الزاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. نشان می‌دهیم که ناصف الزاویه $\hat{A}$ نیز از نقطه O می‌گذرد. با در نظر داشت شکل زیر داریم:



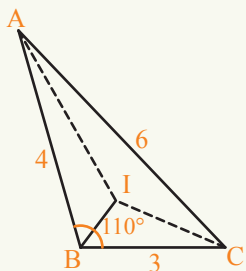
چون O روی ناصف الزاویه $\hat{B}$ است.

پس: $\overline{OH} = \overline{OK}$I

و چون O روی ناصف الزاویه $\hat{C}$ است.

پس: $\overline{OK} = \overline{OI}$II

می دانیم وقتی یک طرف دو مساوات باهم مساوی شوند طرف دیگر آن ها نیز باهم مساوی می شوند. بنابراین از رابطه I و Π نتیجه می گیریم: $\overline{OH} = \overline{OI}$
 از طرف دیگر قرار قضیه قبل می دانیم هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه متساوی الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف آن زاویه قرار دارد. بنابراین نقطه O روی ناصف الزاویه A قرار دارد.
 در نتیجه می توان گفت هر سه ناصف الزاویه های داخلی مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.



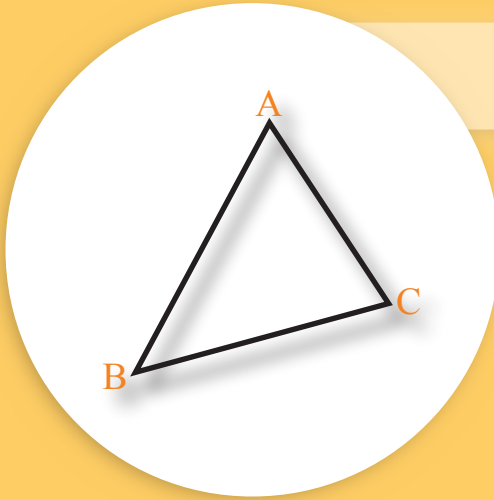
مثال: مثلثی را با طول اضلاع 6، 3، 4 واحد رسم کنید، نشان دهید که ناصف الزاویه ها یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

حل: مثلثی ABC را در نظر گرفته از رأس های A ، B و C ناصف الزاویه ها را رسم نموده، دیده می شود که ناصف ها یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده اند.

تمرین

مثلثی با زاویه های $A = 20^\circ$ ، $B = 75^\circ$ ، $C = 85^\circ$ رسم کنید و نشان دهید که ناصف الزاویه های آن ها یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

ناصف عمودی در یک مثلث



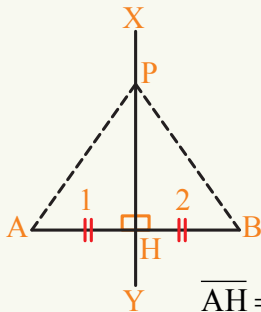
آیا ناصف عمودی یک ضلع مثلث
حتماً از رأس مقابل آن می‌گذرد؟

فعالیت

- ناصف عمودی قطعه خط AB را رسم کنید.
- یک نقطه را مانند P بالای ناصف عمودی قطعه خط AB انتخاب کنید.
- دو انجام قطعه خط AB را به نقطه P وصل کنید.
- توسط خط کش طول های $\overline{PA}$ و $\overline{PB}$ را اندازه بگیرید چه رابطه باهم دارند؟
- قطعه خط دیگری مانند $A'B'$ را رسم کنید و فعالیت فوق را در آن تکرار کنید.

نتیجه فعالیت فوق را طور زیر می‌توان بیان و اثبات کرد.

قضیه: هر نقطه روی ناصف عمودی یک قطعه خط از دو انجام آن متساوی الفاصله اند.



ثبوت: فرض می‌کنیم XY ناصف عمودی قطعه خط AB است. می‌خواهیم نشان دهیم که هر نقطه اختیاری P روی ناصف عمودی از نقاط A و B متساوی الفاصله اند.

یعنی: $\overline{PB} = \overline{PA}$

در دو مثلث PAH و PBH داریم:

$\overline{AH} = \overline{BH}$ ، XY ناصف عمودی است،

$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ ، XY ناصف عمودی است،

$\overline{PH} = \overline{PH}$ ، ضلع مشترک،

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AH} = \overline{BH} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \overline{PH} = \overline{PH} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PAH \cong \triangle PBH$$

چون در دو مثلث PAH و PBH دو ضلع و دو زاویه بین آن ها مساوی اند بنابراین مثلث ها با هم انطباق پذیر اند. در نتیجه اضلاع آنها نیز با هم مساوی اند.
یعنی: $\overline{PB} = \overline{PA}$

عکس قضیه فوق نیز صحیح است.

قضیه: هر نقطه که از انجام های یک قطعه خط متساوی الفاصله باشد، آن نقطه روی ناصف عمودی آن قطعه خط قرار دارد.

فعالیت

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
- ناصف عمودی اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ را رسم و نقطه تقاطع آن ها را O بنامید.
- ناصف عمودی ضلع $\overline{BC}$ را رسم کنید. آیا این ناصف عمودی نیز از نقطه O می گذرد؟

مشاهدات فعالیت فوق را می توان طور زیر بیان و ثبوت کرد.

قضیه: در هر مثلث ناصف عمودی اضلاع آن یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

ثبوت: در مثلث ABC ناصف های عمودی اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ یکدیگر را در نقطه O قطع کرده اند. می خواهیم نشان دهیم که نقطه O روی ناصف عمودی ضلع $\overline{BC}$ قرار دارد.

چون نقطه O روی ناصف عمودی $\overline{AB}$ واقع است.

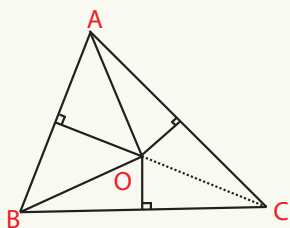
$$\overline{OA} = \overline{OB} \dots\dots\dots \text{I} \quad \text{پس:}$$

چون نقطه O روی ناصف عمودی AC است.

$$\overline{OA} = \overline{OC} \dots\dots\dots \text{II} \quad \text{پس:}$$

از مقایسه تساوی های I و II می توان نتیجه گرفت که:

$$\overline{OB} = \overline{OC}$$

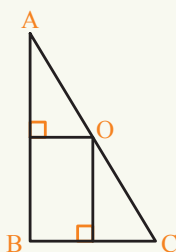


از طرف دیگر قرار قضیه قبل می دانیم هر نقطه که از انجام های یک قطعه خط متساوی الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف عمودی آن قطعه خط قرار دارد؛ بنابراین نقطه O روی ناصف عمودی ضلع $\overline{BC}$ قرار دارد.

در نتیجه ناصف های عمودی اضلاع هر مثلث یک دیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

مثال: یک مثلث قائم الزاویه را رسم کنید. محل تقاطع ناصف های عمودی اضلاع آن را دریافت کنید.

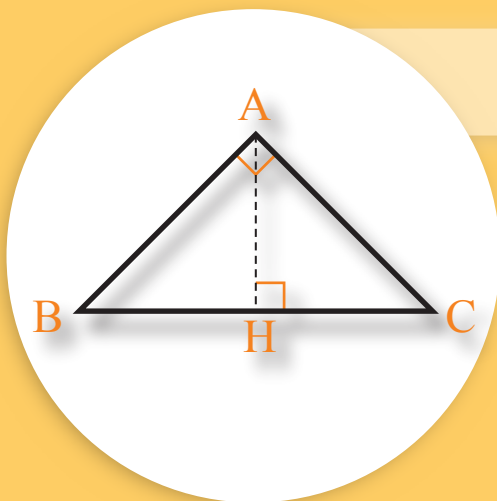
حل: مثلث قائم الزاویه ABC و ناصف های عمودی آن را رسم می کنیم، دیده می شود که ناصف های عمودی اضلاع قائم مثلث در نقطه وسطی بالای وتر یکدیگر را قطع می کنند.



در نتیجه می توان گفت ناصف های عمودی در هر مثلث قائم الزاویه یکدیگر را در نقطه وسطی بالای وتر قطع می کنند.

1- مثلث ABC را با وسعت زاویه‌های 30° , 70° , 80° رسم کنید. محل تقاطع ناصف‌های عمودی اضلاع آن را دریافت کنید.

2- مثلثی را با اضلاع 6، 4 و 2.5 سانتی متر رسم و ناصف‌های عمودی اضلاع آن را ترسیم و محل تقاطع ناصف‌های عمودی را دریافت کنید.



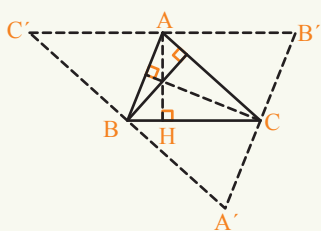
مثلث ABC قائم الزاویه است. اگر AH ارتفاع بالای وتر مثلث باشد ارتفاعات دیگر مثلث کدام ها اند؟

فعالیت

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
- از رأس A ارتفاع را بالای ضلع $\overline{BC}$ رسم کنید، انجام آن را H بنامید.
- از رأس های مثلث ABC خطوطی موازی به اضلاع آن رسم کنید.
- مثلث حاصل شده از تقاطع، این خطوط را $A'B'C'$ نامگذاری کنید؛ طوری که $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ، $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ باشند.
- آیا قطعه خط AH بر قطعه خط $B'C'$ عمود است؛ چرا؟
- آیا چهار ضلعی $ABCB'$ متوازی الاضلاع است؛ چرا؟
- آیا $\overline{AB'} = \overline{AC'}$ است؛ چرا؟
- آیا قطعه خط AH ناصف عمودی قطعه خط $B'C'$ است؛ چرا؟

از فعالیت فوق مشاهده می شود که:

اگر از رأس های یک مثلث خطوطی موازی به اضلاع آن رسم کنیم در این صورت ارتفاعات مثلث اولیه ناصف عمودی اضلاع مثلث تشکیل شده است. می دانیم ناصف های عمودی اضلاع مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند. پس ارتفاعات مثلث، هم یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند. **قضیه:** در هر مثلث ارتفاعات در یک نقطه متقاطع اند.



ثبوت: از رأس‌های مثلث ABC خطوطی را موازی به اضلاع آن رسم می‌کنیم. از تقاطع خطوط مثلث $A'B'C'$ مانند شکل تشکیل می‌شود در این حالت می‌توان نوشت:

$$\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}, \quad \overline{A'C'} \parallel \overline{AC}, \quad \text{و} \quad \overline{A'B'} \parallel \overline{AB}.$$

با در نظر داشت این که اضلاع رو به روی چهارضلعی $ABCB'$ موازی هستند نتیجه می‌گیریم که این چهار ضلعی یک متوازی‌الاضلاع است. بنابراین اضلاع مقابل چهار ضلعی $ABCB'$ مساوی‌اند.

$$\overline{AB'} = \overline{BC} \dots\dots\dots I \quad \text{یعنی:}$$

به همین ترتیب چهار ضلعی $ACBC'$ نیز متوازی‌الاضلاع است؛ در نتیجه:

$$\overline{AC'} = \overline{BC} \dots\dots\dots I$$

$$\overline{AB'} = \overline{AC'} \quad \text{از روابط I و II نتیجه می‌گیریم که:}$$

از طرف دیگر چون $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ و $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$ است؛ بنا بر این $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$ است.

نظر به اینکه $\overline{AB'} = \overline{AC'}$ و $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$ است.

پس: $\overline{AH}$ ناصف عمودی $\overline{B'C'}$ است.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که ارتفاعات بالای اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ نیز به ترتیب ناصف‌های عمودی اضلاع $\overline{A'B'}$ و $\overline{A'C'}$ هستند. چون ناصف‌های عمودی در یک نقطه یک دیگر را قطع می‌کنند؛ پس ارتفاع‌ها نیز یک دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

تمرین

- 1- مثلث ABC را به طول اضلاع 5، 4 و 6 سانتی متر رسم کنید. از هر راس بالای ضلع مقابل ارتفاع رسم نموده و محل تقاطع آن‌ها را در صفحه مشخص کنید.
- 2- یک مثلث قائم‌الزاویه را رسم نموده محل تقاطع ارتفاعات این مثلث را مشخص کنید.
- 3- مثلثی منفرجه‌الزاویه را رسم نموده محل تقاطع ارتفاعات آن را مشخص کنید.

میان‌های مثلث



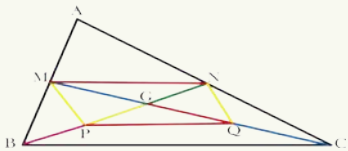
آیا فکر کرده می‌توانید یک مثلث را روی نوک تیز یک پنبسل قرار داده که به زمین نه افتد؟

فعالیت

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
- از رأس B میانۀ BN و از رأس C میانۀ CM را رسم کنید.
- نقطۀ تقاطع آن دو میانۀ را G نامگذاری کنید.
- طول‌های BG و GN را با خط کش اندازه‌گیری کنید. این طول‌ها چه رابطۀ دارند؟
- طول‌های CG و GM را با خط کش اندازه‌گیری کنید. این طول‌ها چه رابطۀ دارند؟
- از رأس A میانۀ را بالای ضلع BC رسم نموده و انجام آن را K بنامید.
- آیا AK از نقطۀ G عبور می‌کند؟
- طول‌های AG و GK را با خط کش اندازه‌گیری نموده. این طول‌ها با هم چه رابطۀ دارند؟

قضیه: میان‌های هر مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع نموده و نقطه تقاطع، هر میانۀ را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می‌کند.

ثبوت: در مثلث ABC نقطۀ G محل تقاطع میان‌های BN و CM است. با در نظر داشت این که قطعه خط MN وسط‌های اضلاع AB و AC را با هم وصل می‌کند. پس طبق قضیه تالس نتیجه می‌شود که:



$$\Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC} \dots \dots \dots I$$

نقطۀ وسطی BG را P می‌نامیم و نقطۀ وسطی CG را Q می‌نامیم.

$\overline{PQ}$ قطعه خطی است که وسط اضلاع $\overline{BG}$ و $\overline{CG}$ را در مثلث GBC با هم وصل می کند. بنا بر قضیه تالس در مثلث GBC می توان نتیجه گرفت که:

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{BC} \dots\dots\dots \text{II}$$

از روابط I و II نتیجه می شود که چهارضلعی $MNQP$ که دو ضلع آن موازی و مساوی اند یک متوازی الاضلاع است.

در متوازی الاضلاع $MNQP$ قطرها یکدیگر را تنصیف می کنند بنابراین:

$$\overline{PG} = \overline{GN} \text{ و } \overline{QG} = \overline{GM}$$

از طرف دیگر می دانیم:

$$\overline{PG} = \overline{PB} \text{ و } \overline{QG} = \overline{QC}$$

بنابراین:

$$\overline{PG} = \overline{GN} = \overline{PB} \text{ و } \overline{QG} = \overline{GM} = \overline{QC}$$

در نتیجه:

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GN}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GM}} = \frac{2}{1}$$

چون میانه های $\overline{BN}$ و $\overline{MC}$ در مثلث ABC دلخواه انتخاب شده بودند، پس این رابطه برای هر دو میانه دلخواه دیگر نیز درست است.

از اینجا نتیجه می شود که سه میانه مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

و نقطه تقاطع، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می کند.

نقطه تقاطع میانه ها به نام مرکز ثقل مثلث یاد می گردد.

تمرین

1- یک مثلث قائم الزاویه رسم نموده محل تقاطع میانه های آن را مشخص کنید؟

2- نشان دهید که در هر مثلث متساوی الاضلاع محل تقاطع میانه ها، ناصف ها و ارتفاعات

در یک نقطه می باشند؟

3- در مثلث ABC اگر G مرکز تقاطع میانه های $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ و $\overline{CK}$ باشد نشان دهید؟

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3}$$

• قضایای مثلث متساوی الساقین

- اگر دو ضلع یک مثلث با هم مساوی باشند. پس زوایای مقابل آن دو ضلع نیز با هم مساوی اند.
- اگر دو زاویه یک مثلث با هم مساوی باشند. اضلاع مقابل زوایای مذکور نیز با هم مساوی هستند.

• قضیه فیثاغورث

- در هر مثلث قائم الزاویه مساحت مربعی که توسط اندازه وتر ساخته می شود برابر مجموع مساحت های دو مربعی است که توسط اندازه های دو ضلع قائم آن مثلث ساخته می شود.
- در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر، مساوی به مجموع مربعات اضلاع قائم آن می باشد:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

• قضایای خطوطی که یکدیگر را در یک نقطه داخل مثلث قطع می کنند

- هر نقطه روی ناصف الزاویه از دو ضلع زاویه متساوی الفاصله است.
- هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه متساوی الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف آن زاویه قرار دارد.
- در هر مثلث ناصف الزاویه های داخلی یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
- هر نقطه روی ناصف عمودی یک قطعه خط از دو انجام آن متساوی الفاصله اند.
- هر نقطه که از انجام های یک قطعه خط متساوی الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف عمودی آن قطعه خط قرار دارد.
- در هر مثلث ناصف عمودی اضلاع آن یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
- در هر مثلث ارتفاعات در یک نقطه متقاطع اند.
- میانه های هر مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند و نقطه تقاطع میانه ها، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می کنند.

تمرینات عمومی

برای سؤال های زیر چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

- 1- در مثلث منفرج الزاویه محل تقاطع هر سه ناصف عمودی در کجاست:
 (a) در داخل مثلث
 (b) در خارج مثلث
 (c) بالای ضلع بزرگ
 (d) هیچ کدام
- 2- مثلثی با داشتن اضلاع 8، 4 و 5 واحد طول مفروض است، سه ارتفاع این مثلث یکدیگر را:

- (a) در داخل مثلث قطع می کنند
 (b) در خارج مثلث قطع می کنند
 (c) روی ضلع به طول 5 متقاطع اند.
 (d) در رأس مقابل بزرگترین ضلع قطع می کنند.
- 3- هرگاه در مثلث قائم الزاویه اندازه اضلاع قائم 3 و 2 واحد باشند، طول وتر عبارت است از:

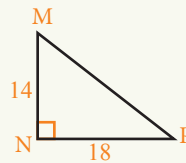
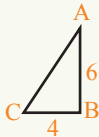
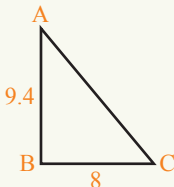
- (a) $\sqrt{13}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 3 (d) 2
- 4- در مثلث متساوی الساقین یک زاویه قاعده آن مساوی به 65° است.
 زاویه قاعده دیگر آن عبارت است از:
- (a) 50° (b) 65° (c) 70° (d) 45°

در عبارات زیر جاهای خالی را با کلمات مناسب پر نمایید.

- 1- در مثلث منفرج الزاویه ارتفاعات یکدیگر را قطع می کنند.
- 2- اگر طول اضلاع یک مثلث به ترتیب 3cm، 4cm و 5cm باشد. مثلث مذکور است.
- 3- در یک مثلث هر گاه دو ضلع آن با هم مساوی باشند آن با هم مساوی است.

سؤالات زیر را حل نمایید.

- 1- در اشکال زیر مثلث های قائم الزاویه داده اند، وتر های مثلثها را به تقریب کمتر از 0.1 حساب کنید.



- 2- مثلث ABC را طوری رسم کنید که $BC = 6$ ، $ABC = 80^\circ$ و $ACB = 80^\circ$ باشد، بعداً ناصف های مثلث های مذکور را رسم کنید.

فصل ششم

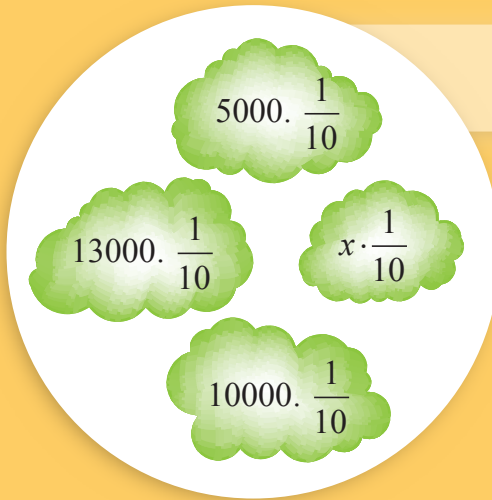
افاده‌های الجبری

$$\frac{y^2 x^4 y^2}{y^2 x + 5} x$$

$$(5-2)n + (8-7)s = 3n + s$$

مفهوم متحول

یک نفر $\frac{1}{10}$ حصه درآمد خود را به فقرا می دهد، این خبر را چگونه می توانیم به زبان ریاضی اعلان کنیم؟



فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید:

طول ضلع مربع	2	1	3	10	$\frac{1}{10}$	9
محیط مربع	4×2					
مساحت مربع			3×3			

- $4 \times a$ یعنی چه؟ برای ساده نویسی $4 \times a$ را به شکل $4a$ نشان می دهیم.
- آیا می توان مساحت هر مربع را به شکل a^2 نشان داد؟
- آیا می توان برای نشان دادن مساحت مربع از حرف دیگر استفاده کرد؟
- اگر محیط مربع را به P و مساحت آن را به S نشان دهیم، قاعده برای پیدا کردن محیط و مساحت مربع را دریافت کنید.
- محیط و مساحت مربعی با ضلع 4 واحد با قرار دادن 4 به جای a به دست بیاورید.
- آیا می توان به جای a هر عدد مثبت دیگر را قرار داد؟ این عدد مثبت چه چیزی را نشان می دهد؟

از فعالیت فوق می توان بیان کرد:

برای بیان قاعده و یا قانون عمومی از حروف می توان استفاده کرد. با در نظر داشت این حقیقت که قیمت های مختلف را می توان به جای حروف قرارداده در این حالت حروف را متحول می نامیم.

مثال 1: یک عدد a به علاوه عدد 5 را در یک افاده نوشته و مقادیر آن را برای 5, -3, $a = 2$ محاسبه کنید.

حل: افاده فوق عبارت است از $a + 5$ که برای قیمت های مختلف a جدول زیر را ترتیب می دهیم.

a	2	-3	5
$a + 5$	$2 + 5 = 7$	$-3 + 5 = 2$	$5 + 5 = 10$

مثال 2: جمله " حاصل ضرب یک عدد ضرب در خودش مساوی است با همان عدد به توان 2". این عبارت را به شکل یک افاده نوشته وبا دو مثال عددی نشان دهید.

حل: افاده حرفی عبارت است از: $a \times a = a^2$

اگر $a = 2$ باشد پس: $2 \times 2 = 2^2 = 4$ است.

اگر $a = \frac{1}{2}$ باشد. پس: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ می شود.

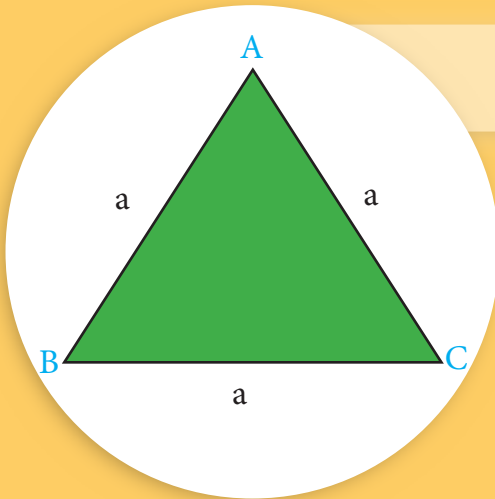
تمرین

جملات زیر را با استعمال حروف مناسب به صورت افاده های حرفی نشان دهید و برای هریک 3 مثال عددی بیاورید.

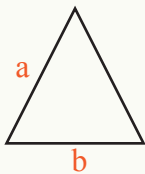
- هر عدد به توان یک مساوی به خود عدد است.
- یک به توان هر عدد مساوی به یک است.
- به استثنای صفر هر عدد به توان صفر مساوی به یک است.
- صفر به توان هر عدد مساوی به صفر است.

افاده‌های الجبری

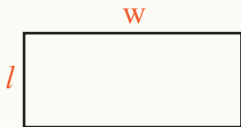
محیط مثلث شکل ورودی را دریافت کنید.



فعالیت



- در مثلث متساوی الساقین مقابل، اندازه ساق را به a و قاعده را به b نشان می‌دهیم. چرا هر دو ساق را به a نشان می‌دهیم؟
- محیط مثلث را به شکل یک فورمول بنویسید. آن را برای $a = 4$ و $b = 5$ محاسبه کنید.



- محیط و مساحت مستطیل مقابل را به صورت یک فورمول بنویسید.
- مساحت و محیط مستطیل را برای $w = \frac{3}{4}$ و $l = \frac{2}{3}$ به دست آورید.

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

افاده‌هایی مثل $4a$ ، $3a-b$ ، $2a+b$ ، $\frac{4a-b}{2}$ و $\sqrt{4a}$ را که از ترکیب عملیه‌هایی چون: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، توان و جذر با اعداد از یک یا چند متحول تشکیل شده باشند، افاده‌های الجبری (جملات الجبری) می‌نامند. قیمت عددی یک افاده الجبری را می‌توان برای قیمت‌های مختلف متحول دریافت کرد.

مثال: قیمت افاده الجبری $2b$ را به قیمت‌های داده شده 2 ، -2 ، -3 ، 4 ، $\frac{3}{2}$ دریافت کنید.

حل:

b	2	4	-2	-3	$\frac{3}{2}$
2b	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$2 \times (-2) = -4$	$2 \times (-3) = -6$	$2 \times \frac{3}{2} = 3$

تمرین

1- قیمت عددی هر افاده الجبری را به قیمت های داده شده حساب کنید.

x	1	6	-2
$x - \frac{1}{2}$			

a	2	-5	3
b	$-\frac{1}{2}$	9	5
$b(a+7)$			

ساده کردن افاده‌های الجبری

x : کتابچه

y : قلم

$$2x + 3x = 5x$$

$$3x + 2y = ?$$

عبدالله گفت: من دو کتابچه داشتم، سه کتابچه دیگر پدرم برایم خرید حال 5 کتابچه دارم.
کبیر گفت: من هم سه کتابچه داشتم، 2 قلم پدرم برایم خرید. چه می‌توانم بگویم؟

فعالیت

عبارت‌های زیر را ساده و تکمیل کنید.

$$5 \times 3 + 2 \times 3 = (5 + 2) \times 3 = 7 \times 3$$

$$8 \times 0.5 - 2 \times 0.5 = (\dots - \dots) \times \dots = \dots \times \dots = \dots$$

$$2 \text{  + 3 \text{  = (\dots + \dots) \text{  = \dots \text{ $$

$$4 \text{  + 3 \text{  + 2 \text{  = (\dots + \dots + \dots) \text{  = \dots \text{ $$

$$2a + 3a = (\dots + \dots)a = \dots a$$

$$-3y + 4y = (\dots + \dots)y = \dots y$$

$$2ax + 3ax = (\dots + \dots) \times ax = \dots ax$$

• در ساده کردن عبارت‌های فوق از کدام خاصیت استفاده کردیم؟

• آیا می‌توانید $3x + 2y$ یا $3 \text{  + 2 \text{ $ را جمع کنید؟

• آیا می‌توان افاده $2b + 3b$ را جمع نماییم؟

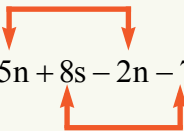
از فعالیت فوق می توان چنین نتیجه گرفت:

دیده می شود که $2a + 3a$, $-3y + 4y$ و $2ax + 3ax$ هر کدام افاده های الجبری اند که حد های آن دارای عین حروف و توان های مساوی می باشد پس گفته می توانیم حد های که دارای عین حروف بوده و توان های شان مساوی باشند حدود مشابه گفته می شوند.

مثال 1: افاده زیر را ساده کنید:

$$5n + 8s - 2n - 7s$$

حل: چون تنها تفاوت $5n$ و $-2n$ در ضریب ها است که در متحول ضرب می شود پس حدود مشابه هستند به همین ترتیب $-7s$ و $8s$ نیز با هم مشابه اند که ذیلاً نشان داده شده اند.


$$5n + 8s - 2n - 7s = (5 - 2)n + (8 - 7)s = 3n + s$$

چون s و $3n$ با هم مشابه نیستند. پس جمله را بیشتر از این نمی توان ساده کرد.

مثال 2: افاده های $5xy^2 + 4yz - 8$ و $xy^2 + 3yz + 8$ را جمع کنید.

$$\begin{array}{r} 5xy^2 + 4yz - 8 \\ + \quad xy^2 + 3yz + 8 \\ \hline 6xy^2 + 7yz \end{array}$$

تمرین

1- افاده های الجبری زیر را ساده کنید:

a) $5a + 7d - 4a + 3d$

b) $8c + 3k + 5k - 8k$

c) $3d + 2c + 4d + 3c - 5d$

d) $4b - 5 - 3b + 2$

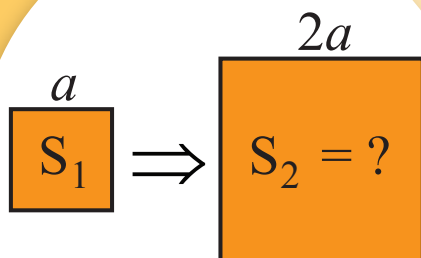
2- کدام یک از افاده های زیر با هم مشابه اند:

b) $3xy^2$, $8x^3y$

c) $3x^2$, $9x^2$

a) $-4x^2y$, $2x^3y^3$

ضرب یک حدها



مربعی با ضلع a داریم اگر اضلاع
مربعات دو برابر باشند، نسبت مساحت
مربع اول بر دوم چقدر است؟

فعالیت

تساوی های زیر را در نظر بگیرید:

$$(3x^3y^2) \cdot (2x^2y) = (3 \times 2)x^3y^2 \cdot x^2y = 6x^{3+2}y^{2+1} = 6x^5y^3$$

$$(4a^2b) \cdot (6ab^2) = (4 \times 6)a^2b \cdot ab^2 = 24a^3b^3$$

- در این حاصل ضرب از کدام خاصیت عملیه ضرب و قاعده ضرب طاقتهای استفاده شده است؟
- ضریب عددی عوامل ضربی طرف چپ مساوات و ضریب عددی افاده الجبری طرف راست تساوی باهم چه رابطه یی دارند؟
- توان های هریک از متحولین در دو افاده الجبری با هم چی رابطه دارند؟

• محاسبات فوق را برای افاده های زیر انجام دهید:

$$3x^2y^3z^2 \times 4x^2y^3z = \dots$$

$$-9x^3a^2 \times \frac{1}{5}ya^3 = \dots$$

در فعالیت بالا افاده های چون $3x^3y^2$, $2x^2y$, $6ab^2$, $4a^2b$ را که از ضرب عدد در متحول با توان های طبیعی یا صفر تشکیل شده اند یک حده و عددی را که در متحول ها ضرب می شوند به نام ضریب یک حده یاد می کنند.
در ضرب یک حده ها باید ضرایب و علامه آن ها را در همدیگر ضرب کنیم و توان های متحولین مشابه را با هم جمع کنیم.

مثال 1: افاده های الجبری $6b^3$, $-4ab$ را با هم ضرب کنید.

حل: $(-4ab)(6b^3) = (-4 \cdot 6)abb^3 = -24ab^4$

مثال 2: کدام یک از افاده های الجبری زیر یک حده اند؟

a) $\frac{4}{5}y^2x$

b) $4y^2x + 5$

c) $\frac{4y^2}{x}$

d) $\sqrt{xy}$

حل: c, a و d هر کدام یک حده اند.

تمرین

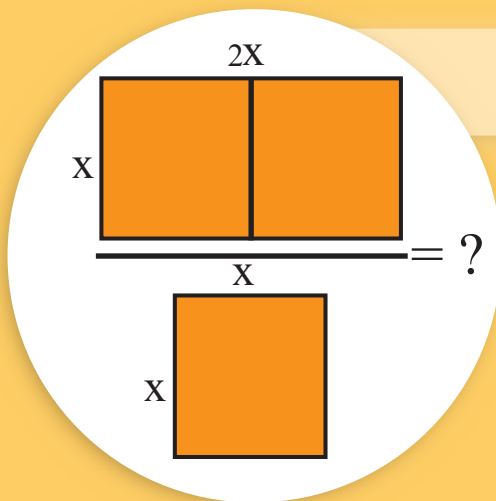
حاصل ضرب یک حده های زیر را حساب کنید:

a) $(-5x^2ay) \times (3ax)$

b) $(-2xy^2z) \times (x^2z)$

c) $-2xy^2 \times (-3a^2)$

d) $(-3x^2) \times (-5xy^2)$



تقسیم افاده های یک حده

مساحت مستطیل به طول $2x$ و عرض x ، چند برابر مساحت مربع به طول x است؟

فعالیت

$$\frac{3y^5}{y^2} < \frac{3y^5}{y^2} = \frac{3y^{\blacksquare} y^{\blacksquare}}{y^2}$$

$$\frac{3y^5}{y^2} = 3y^{\blacksquare} - \blacksquare = 3y^{\blacksquare}$$

جاهای خالی را پر کنید.

- دو روش تقسیم یک حده ها را با هم مقایسه کنید. در هر روش از چه خواص استفاده کرده ایم.
- ضریب توان های متحول در دو طرف راست و چپ با هم چه رابطه دارند؟

از فعالیت فوق می توان بیان کرد:

در تقسیم یک حده ها از قاعده ساده کردن کسرها استفاده می شود. ابتدا ضریب عددی یک حده ها را بالای یکدیگر تقسیم نموده و حدود باقیمانده را با استفاده از قوانین طاقت ساده می کنیم.

مثال 1: یک حده $-20x^4y^3z$ را بر یک حده $5x^3y^2z$ تقسیم می کنیم.

$$\frac{-20x^4y^3z}{5x^3y^2z} = \frac{-20}{5} \times \frac{x^4}{x^3} \times \frac{y^3}{y^2} \times \frac{z}{z}$$

$$= -4xy$$

حل:

مثال 2: افاده الجبری $\frac{12x^3 + 8x^2}{2x}$ را ساده کنید.

حل:

$$\begin{aligned}\frac{12x^3 + 8x^2}{2x} &= \frac{12x^3}{2x} + \frac{8x^2}{2x} \\ &= 6x^2 + 4x\end{aligned}$$

تمرین

ساده کنید:

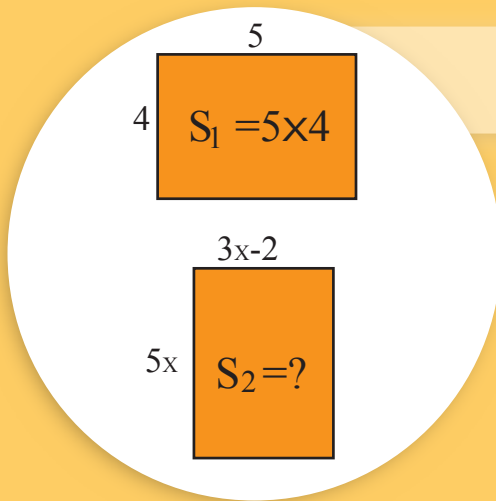
a) $\frac{-a^4b^8}{a^4b^7}$

b) $\frac{a^4b^2}{a^6b^2}$

c) $\frac{10m^4}{30m}$

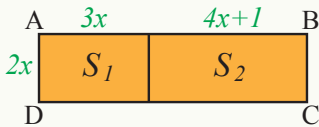
d) $\frac{-9c^4d^5}{-45c^3d^3}$

ضرب افاده‌های الجبری



می‌دانیم مساحت یک مستطیل را که طول آن 5 و عرض آن 4 سانتی متر باشد چگونه پیدا کنیم. آیا مساحت مستطیلی که طول آن $(3x-2)\text{cm}$ و عرض آن $5x\text{cm}$ است چگونه می‌توان پیدا کرد؟

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید:

- مساحت مستطیل S_1 را با یک افاده الجبری بنویسید.
- مساحت مستطیل S_2 را با یک افاده الجبری بنویسید.
- مساحت مستطیل $ABCD$ را با یک افاده الجبری بنویسید و آن را به S نشان دهید.
- چه رابطه‌یی بین S_1 و S_2 وجود دارد؟

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

برای ضرب کردن یک افاده یک حده در یک افاده الجبری از خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع می‌توان استفاده کرد.

مثال 1: حاصل ضرب یک حده $-5ax^2$ را در افاده الجبری $x^2 - a^2$ به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} -5ax^2(x^2 - a^2) &= (-5ax^2) \times x^2 + (-5ax^2) \times (-a^2) \\ &= -5ax^4 + 5a^3x^2 \end{aligned}$$

مثال 2: $3a^2(a^3 - 2a^2 + 6a) = ?$

حل:

$$\begin{aligned} 3a^2(a^3 - 2a^2 + 6a) &= 3a^2(a^3) + [3a^2(-2a^2)] + 3a^2(6a) \\ &= 3a^5 - 6a^4 + 18a^3 \end{aligned}$$

فعالیت

	$3x$	$2b$
$2x$	S_1	S_3
b	S_2	S_4

شکل مقابل را در نظر بگیرید:

- مساحت مستطیل S_1 را دریافت کنید.
- مساحت مستطیل S_2 را دریافت کنید.
- مساحت مستطیل S_3 را دریافت کنید.
- مساحت مستطیل S_4 را دریافت کنید.
- اگر طول مستطیل $3x+2b$ و عرض آن $2x+b$ باشد. مساحت مستطیل بزرگ را دریافت کنید و آن را به S نشان دهید.
- رابطه بین S ، S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 را بنویسید.

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

برای ضرب کردن دو افادهٔ الجبری با همدیگر با استفاده از خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع، یک به یک تمام حدود افادهٔ اول را در حدود افادهٔ دوم ضرب می‌کنیم.

مثال 1: حاصل ضرب دو حدهٔ $x+2$ در دو حدهٔ $x-1$ را به دست آورید.

$$(x+2)(x-1) = x(x-1) + 2(x-1)$$

$$= x^2 - x + 2x - 2$$

$$= x^2 + x - 2$$

حل:

مثال 2: $(x+2)(x-2)$ را ساده کنید.

$$(x+2)(x-2) = x(x-2) + 2(x-2)$$

$$= x^2 - 2x + 2x - 4$$

$$= x^2 - 4$$

حل:

تمرین

حاصل ضرب افاده‌های زیر را به دست آورید:

1) $-3n(2n^4 - 6n^2)$

2) $5ab(a^2 - ab + b^2)$

3) $-9k^3(2k^2 - 4k - 7)$

4) $(a+b)(x+y)$

$$(10002)(9998)=?$$

$$(10000+2)(10000-2)$$

$$=(10000)^2-2^2$$

آیا می توانید یک راه ساده و سریع
را برای ضرب 10002×9998
دریافت کنید؟

فعالیت

در جدول زیر قیمت های دو افاده الجبری A و B را برای قیمت های مختلف X دریافت کنید:

x	A = 3x(2x - 4)	B = 6x ² - 12x
3		
2		
-4		
0		
$\frac{1}{2}$		

چه رابطه بین A و B وجود دارد؟

از فعالیت فوق می توان رابطه بین A و B را به شکل زیر خلاصه کرد:
تساوی دو افاده الجبری را که برای تمام قیمت های متحول با هم مساوی باشند یک مطابقت می نامیم.

فعالیت

- $202 \cdot 198 = ?$
- $104 \cdot 96 = ?$
- $32 \cdot 28 = ?$

• عملیه ضرب اعداد مقابل را انجام دهید.

• جاهای خالی را پر کنید. $a: (a+b)(a-b) = \dots - \dots + \dots - \dots$

$b: (a-b)(a+b) = \dots + \dots - \dots - \dots$

• در افاده های فوق قیمت $a = 200$ و قیمت $b = 2$ قرار دهید. حاصل ضرب جزء a و جز b را با هم مقایسه کنید.

• این بار $a = 100$ و $b = 4$ در دو طرف مساوات قرار داده حاصل ضرب جزیهای a و b را مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم:

حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضل همان دو عدد مساوی است با تفاضل مربعات آن دو عدد $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ که به نام تفاضل مربعات هم یاد می شود.

مثال: قوس های زیر را با هم ضرب و به شکل تفاضل مربعات افاده کنید:

a) $(x-5)(x+5)$

b) $(5x^2y^2+7)(5x^2y^2-7)$

c) $(2a^2+5a)(2a^2-5a)$

d) $(\frac{x}{4}+1)(\frac{x}{4}-1)$

حل a):
 $(x-5)(x+5) = x \times x + 5x - 5x - 5 \times 5$
 $= x^2 - 25$

b):
 $(5x^2y^2+7)(5x^2y^2-7) = (5x^2y^2)^2 - 7(5x^2y^2) + 7(5x^2y^2) - (7)^2$
 $= 25x^4y^4 - 49$

c):
 $(2a^2+5a)(2a^2-5a) = (2a^2)^2 - (5a)^2$
 $= 4a^4 - 25a^2$

d):
 $(\frac{x}{4}+1)(\frac{x}{4}-1) = (\frac{x}{4})^2 - (1)^2$
 $= \frac{x^2}{16} - 1$

تمرین

قوس های زیر را با هم ضرب و به شکل تفاضل مربعات افاده کنید.

a) $(P-7)(P+7)$

b) $(\frac{1}{x}+1)(\frac{1}{x}-1)$

c) $(x+2)(x-2)$

d) $(2x+5)(2x-5)$

e) $(49+1)(49-1)$

f) $(6x-y)(6x+y)$

• مفهوم متحول

برای بیان قاعده عمومی یا قانون از حروف می توان استفاده کرد. با در نظر داشت این که قیمت های مختلف را می توان به جای حروف قرار داد. در این حالت حروف را متحول می نامیم.

• تعریف افاده یک حده

اعداد و حروف الجبری که در آن عملیه ضرب، تقسیم، طاقت و جذر صورت گرفته باشد افاده یک حده الجبری نامیده می شود.

$$\text{مثلاً: } 4a^2b, 6ab^2, \frac{3y^2}{3x^2}, \frac{3abc}{c^2}, 2x^2y, \frac{3x^2y^2}{5ab}$$

• ضریب افاده یک حده

عددی که در متحول ضرب می شود ضریب یک حده می نامیم.

• حدود مشابه

حدهایی که دارای عین حروف بوده و توان های شان مساوی باشند حدود مشابه گفته می شوند.

• افاده های الجبری

افاده های مثل $2a+b$, ab , $3x-4$, a^2 و $\sqrt{4a}$ که از ترکیب عملیه های چون: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، توان و جذر با اعداد از یک یا چند متحول تشکیل شده باشند افاده های الجبری نامیده می شوند. مقدار قیمت یک افاده الجبری را می توان برای قیمت های مختلف متحول دریافت کرد.

• ضرب افاده یک حده

در ضرب یک حده ها باید ضرایب و علامه آن ها را با همدیگر ضرب کنیم و توان های متحول های مشابه را با هم جمع کنیم.

• تقسیم افاده های یک حده

در تقسیم افاده های الجبری یک حده از قاعده ساده کردن کسرها استفاده می شود. که ابتدا ضرایب و علامه ها را بالای یکدیگر تقسیم نموده و حدود باقی مانده را با استفاده از قوانین توان ها، ساده می سازیم.

مطابقت

- تساوی دو افاده الجبری که برای تمام قیمت های متحول برقرار است، یک مطابقت می نامیم.
- حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضل همان دو عدد مساوی است با تفاضل مربعات آن دو عدد.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

1- سؤال های زیر را به دقت خوانده برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب درست را انتخاب نموده و دور آن را حلقه بکشید.

• یک عدد ضرب در خودش جمع 6 عبارت است از:

- a) $x^2 - 6$ b) $x + 6$ c) $x^2 + 6$ d) هیچ کدام

• حاصل ضرب $-5ab(4ac)$ عبارت است از:

- a) $-20a^2bc$ b) $20a^2bc$ c) $20ab^2c$ d) $20a^2bc^2$

• حاصل تقسیم $\frac{4m^2n^2}{-4m^3n^2}$ عبارت است از:

- a) m^{-1} b) $\frac{-1}{m}$ c) $-m^{-1}$ d) جواب b و c درست است

• قیمت عددی افاده $6x^3 - \frac{1}{2}$ در صورتی که $x = \frac{1}{2}$ باشد عبارت است از:

- a) $-\frac{1}{4}$ b) 4 c) 4^{-1} d) $\frac{1}{4}x$

2- جا های خالی را با کلمات و اعداد مناسب پر کنید:

- برای ساده کردن افاده های الجبری را با هم جمع و تفریق می کنیم.
- یک افاده الجبری که از ضرب اعداد حقیقی و های مختلف با توان های اعداد تام یا اعداد حقیقی تشکیل شده باشد یک حده است.
- عددی که در متحول ها می شوند. ضریب یک حده می نامیم.

3- افاده های زیر را ساده کنید:

- a) $2b(-2c)^2$ b) $(-6xy^2)(-ax^2y^2)$
c) $-2a(-3ab)^2$ d) $4y^2(6xy)$

4- کسرهای زیر را ساده کنید:

$$a) \frac{12x^2y^4}{2xy^3}$$

$$b) \frac{3ab}{-3a}$$

$$c) \frac{-15xyz}{-3xy}$$

$$d) \frac{-5a^2b + 10ab^2}{-5ab}$$

5- ساده کنید:

$$a) 7a^3b^4c^2 - 8a^3b^4c^2$$

$$b) \begin{array}{r} 5x + y \\ + 3x - 2y \\ \hline \end{array}$$

$$c) \begin{array}{r} 4a + 5b - 2c \\ + 4a - 3b - 2c \\ \hline \end{array}$$

6- افاده‌های زیر را با استفاده از مطابقت ساده کنید:

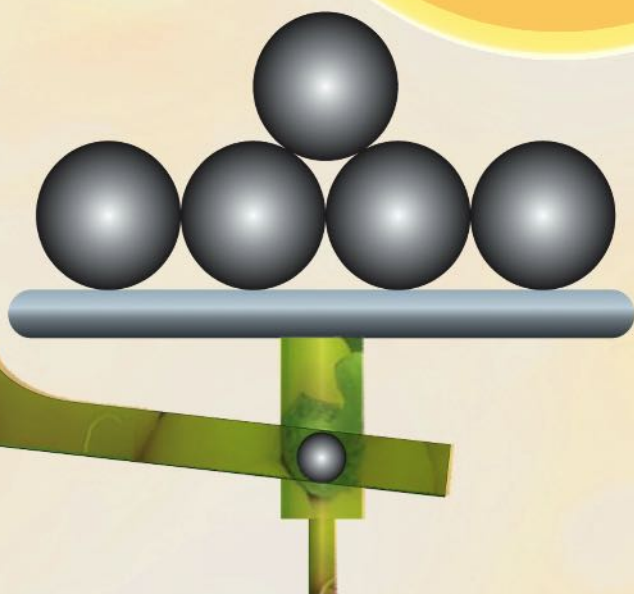
$$a) \left(\frac{1}{2} + z\right)\left(\frac{1}{2} - z\right)$$

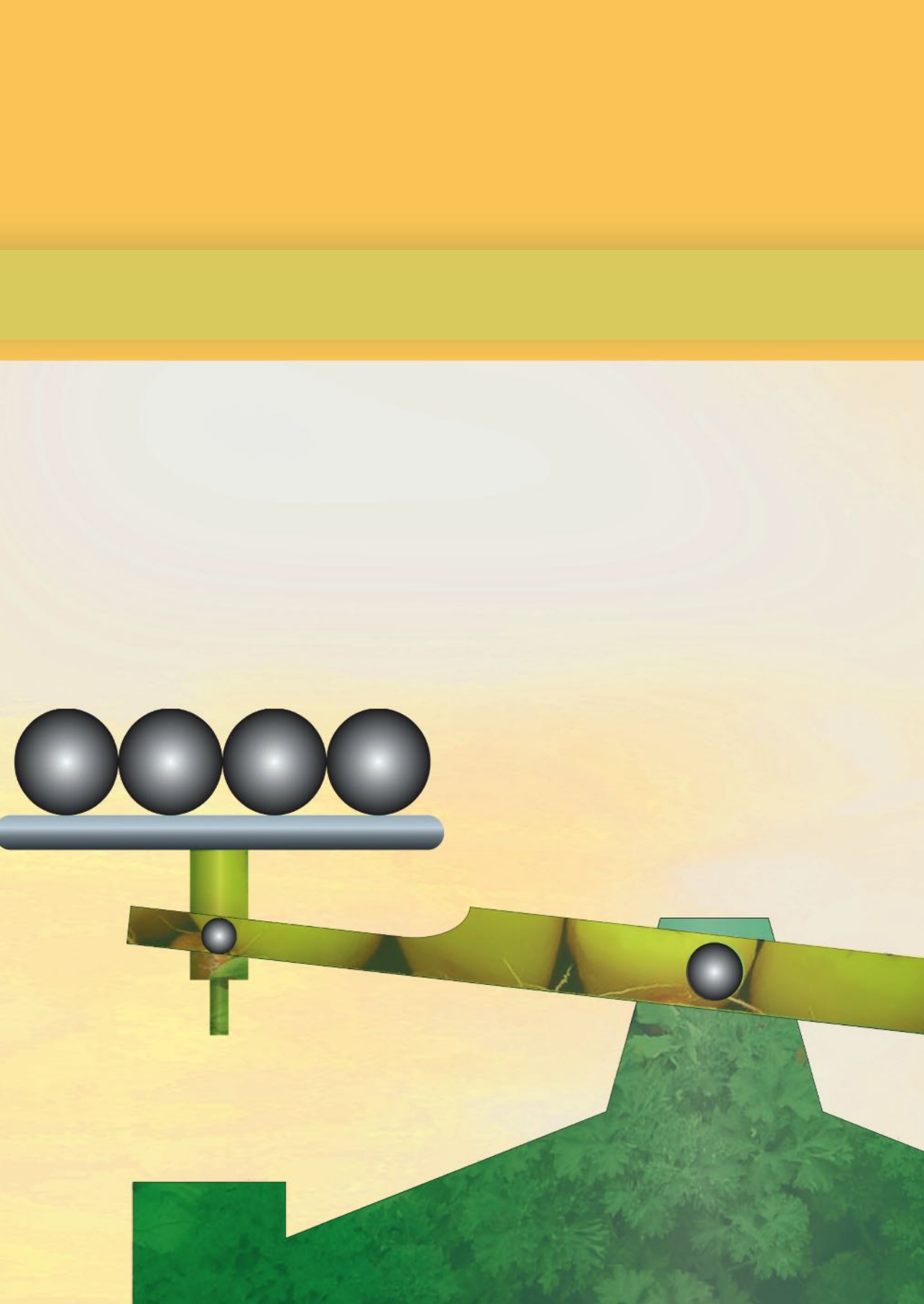
$$b) \left(\frac{a}{5} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{a}{5} - \frac{1}{b}\right)$$

$$c) (5a + 2b)(5a - 2b)$$

فصل هفتم

معادلات





$$\frac{1}{2}x - 5 = x - 10$$



زلمی: عمر! چقدر پول در نزد خود دارید؟
عمر: اگر از دو چند پولی که در نزد خود دارم 2 افغانی کم گردد مساوی به 20 افغانی می شود.
زلمی: فهمیدم چند افغانی دارید.
عمر: چطور فهمیدی که من نزد خود چند افغانی نقد دارم؟

فعالیت

- زلمی می خواست از یک دکان یک کیلو بوره بخرد. دکاندار تنها وزن های یک یک دانه یی 100 گرامه، 150 گرامه، 250 گرامه، نیم کیلویی و 2 کیلویی داشت.
- چگونه برای زلمی دکاندار یک کیلو بوره را وزن کند؟ کدام یک از روش های زیر برای وزن کردن یک کیلو گرام بوره درست است؟
 - دکاندار اولاً نیم کیلو بوره را وزن نموده، بعد وزنه نیم کیلویی را با نیم کیلو بوره وزن شده در یک پله ترازو گذاشته و یک کیلو بوره را در پله دیگر ترازو وزن می کند.
 - دکاندار 2 کیلو بوره را وزن نموده، بعد 2 کیلو بوره وزن شده را در هر دو پله ترازو نصف می کند.
 - چه روش دیگر برای اندازه کردن یک کیلو بوره را شما می توانید با استفاده از وزن های موجود پیشنهاد نمایید؟
 - در پایان هر روش هر دو پله ترازو در چی حالتی قرار دارند؟
 - محتویات هر دو پله ترازو در پایان هر روش با هم چه نسبتی دارند؟
 - اگر در یک پله ترازو یک بسته وزن نا معلوم با یک وزنه یک کیلویی و در پله دیگر آن یک وزن نیم کیلویی و دو کیلویی در حال تعادل قرار داشته باشند، تعادل پله ها را با یک تساوی الجبری نشان دهید.
 - آیا می توانید تصور کنید که وزن بسته چند است؟ به عبارت دیگر بسته نامعلوم چقدر وزن داشته باشد تا تعادل ترازو حفظ گردد؟
 - در فعالیت بالا، وزن کردن یک کیلو گرام بوره و تعادل آن با اوزان گوناگون موجود نتیجه

زیر را به معنای مفهوم معادله به دست می آوریم.

تعریف

- یک مساوات الجبری که برای بعضی از قیمت های مجهول صدق نماید به نام معادله و دریافت عددی که معادله الجبری را به یک مساوات عددی تبدیل نماید به نام حل و یا جذر معادله یاد می گردد.
- آنچه که در حل معادله پی سراغ آن می باشیم به نام مجهول معادله یاد گردیده که اکثراً آن را به x نشان می دهند.

مثال: اگر با یک عدد، عدد 5 جمع گردد مساوی به 15 می شود، عدد کدام است؟

حل: اگر عددی را که دنبال آن هستیم x بنامیم پس سوال طوریست که اگر با x عدد 5

جمع شود مساوی به 15 می گردد، یعنی:

$$x + 5 = 15$$

کدام عدد است که با 5 جمع گردیده و در نتیجه عدد 15 حاصل گردد.

از حل کردن معادله فوق می توان گفت که عدد مساوی به 10 می باشد.

$$x = 10$$

یعنی:

حال به خاطر امتحان مسأله هرگاه قیمت دریافت شده را در معادله $x + 5 = 15$ وضع

$$x + 5 = 15$$

نماییم داریم:

$$10 + 5 = 15$$

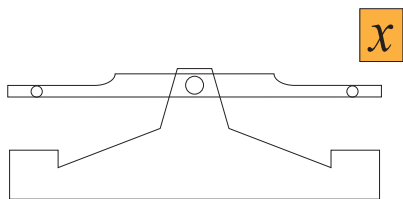
$$15 = 15$$

چون تساوی عددی $15 = 15$ درست است بنابر این پاسخی که به دست آورده بودیم برای معادله درست می باشد.

تمرین

- 1- اگر محیط یک مثلث متساوی الاضلاع مساوی به 9 واحد طول باشد، مطلوب است. معادله الجبری که از حل آن یک طول ضلع مثلث را دریافت نموده بتوانیم.
- 2- اگر با یک عدد، عدد 9 جمع گردد مساوی به 14 می شود، عدد چند است؟

عملیه های جمع و تفریق در معادله



اگر یک وزن نامعلوم با دو گلوله در یک طرف پله ترازو و در پله دیگر آن 5 گلوله برابر و مساوی قرار داشته باشند، وزن مجهول مساوی به چند گلوله می باشد؟ چه فکر می کنید؟

فعالیت

- تبادل ترازو در حالت فوق به معنای آن است که اوزان قرار گرفته در هر دو پله ترازو با هم برابر اند. پس اگر وزن نامعلوم طرف راست را x بنامیم به سؤال های زیر جواب دهید.
- تساوی الجبری برای تبادل این که 2 گلوله با وزن مجهول در یک پله و در پله دیگر ترازو 5 گلوله قرار داشته باشند بنویسید؟
- اگر از هر دو پله ترازو دو گلوله را برداریم آیا تبادل ترازو باقی می ماند؟
- آیا کم کردن گلوله ها از هر دو پله ترازو از نگاه ریاضی با عملیه ریاضی یکسان است؟
- نظر به این که با کم کردن گلوله ها تبادل بر هم نمی خورد پس این عمل از نگاه ریاضی چه معنا دارد؟
- حال اگر به هر دو پله ترازو 4 عدد گلوله های یکسان علاوه گردد چه اتفاقی می افتد؟

از مشاهدات فعالیت بالا نتیجه زیر به دست می آید:

- اگر از هر دو طرف پله های یک ترازو در حال تعادل، یک مقدار معین را کم و یا به هر دو پله یک مقدار مساوی را اضافه نماییم باز هم تعادل باقی می ماند.
- به اصطلاح ریاضی اگر از طرفین یک تساوی عین عدد را کم و یا با آن زیاد نماییم باز هم تساوی برقرار می ماند. یعنی:
- اگر $a = b$ باشد، پس برای هر عدد حقیقی c :
- $a + c = b + c$ و $a - c = b - c$ می باشد.
- از این خاصیت در حل معادلات استفاده به عمل می آید.

مثال 1: معادله $x + 7 = 9$ را حل کنید؟

حل: میدانیم که اگر از طرفین معادله عدد 7 را کم کنیم در تعادل معادله تغییر نمی آید، بنابراین:

$$x + 7 - 7 = 9 - 7$$

$$x = 2$$

$$x + 7 = 9$$

$$2 + 7 = 9$$

$$9 = 9$$

امتحان: هر گاه حل دریافت شده را در اصل معادله قرار دهیم داریم:

چون تساوی عددی برقرار است، بنا بر این حل دریافت شده $x = 2$ درست است.

مثال 2: حل معادله $x - 5 = 4$ را به دست آورید؟

حل: میدانیم که هر گاه با طرفین معادله، عددی را جمع نماییم، تعادل مساوات بر هم نمی خورد، بنا بر این، جمع نمودن عدد 5 به هر دو طرف معادله برای ما می دهد:

$$x - 5 + 5 = 4 + 5$$

$$x = 9$$

امتحان: حل دریافت شده را در اصل معادله قرار می دهیم:

$$x - 5 = 4$$

$$9 - 5 = 4$$

$$4 = 4$$

چون تساوی عددی $4 = 4$ وجود دارد؛ بنا بر این $x = 9$ حل معادله می باشد.

تمرین

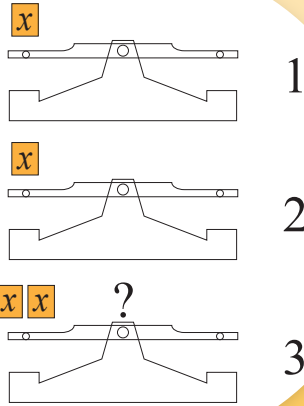
- 1- اگر با یک عدد 3 اضافه گردد 15 حاصل می شود؛ عدد کدام است؟
- 2- اگر از یک عدد 7 را تفریق نماییم 13 حاصل می گردد؛ عدد کدام است؟
- 3- معادلات زیر را حل کنید:

a) $x - 6 = 2$

b) $x + 4 = 1$

c) $2 + x = 3$

عملیه های ضرب و تقسیم در معادلات



دو ترازوی 1 و 2 با 2 گلوله مساوی در یک طرف و در طرف دیگر آن یک وزن نامعلوم در حال تعادل قرار دارد. هرگاه طرف به طرف گلوله ها را در یک پله و وزن ها را در یک پله دیگر ترازوی شماره 3 قرار دهیم جواب تان به سؤال زیر چیست؟ آیا ترازوی شماره سوم در حال تعادل خواهد ماند یا نه؟

فعالیت

ترازوی شماره 3 را در نظر می گیریم. دیده می شود که باز هم ترازو در حالیکه در یک طرف آن دو وزنه مجهول و در طرف دیگر آن 4 عدد گلوله مساوی قرار دارند، در حال تعادل است. اگر وزن مجهول را x بنامیم به حل سؤال های زیر فکر کنید؟

- افاده ریاضی و یا به عبارت دیگر بیان الجبری برای تعادل ترازوی شماره 3 کدام است؟
- حال هرگاه دوباره گلوله ها و وزنه ها را بجای خود برگردانده نصف نماییم و دوباره یک قسمت را به ترازوی شماره 1 و قسمت دیگر را در همین ترازو باقی بمانیم، آیا در این صورت باز هم تعادل در ترازوهای شماره 1 و 3 وجود خواهد داشت؟
- نصف نمودن گلوله ها و وزنه ها از نگاه ریاضی چه معنی دارد؟
- آیا این فعالیت را برای بیشتر از 2 ترازو نیز می توانیم انجام دهیم؟

از فعالیت فوق می توانیم نتیجه زیر را بیان نماییم:

هرگاه وزنه های هر دو طرف ترازو را به دو یا بیشتر از دو قسمت مساوی تقسیم یا ضرب نماییم و یا نصف از وزنه را از هر دو طرف ترازو برداریم باز هم تعادل باقی می ماند. زیرا وزن هر دو طرف ترازو با هم مساوی می باشد.

از نگاه ریاضی اگر طرفین یک تساوی را در عددی ضرب یا بر عددی خلاف صفر تقسیم نماییم، باز هم مساوات باقی می ماند به عبارت دیگر:

اگر $a = b$ باشد، پس برای هر عدد حقیقی c ، $ac = bc$ می باشد.

و برای هر عدد حقیقی c خلاف صفر، $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ می باشد.

مثال: مساوات $3x = 6$ را در نظر گرفته، حل آن را به دست آورید.

اطراف مساوات فوق را به 3 تقسیم نموده داریم:

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

امتحان: هرگاه قیمت $x = 2$ را در اصل معادله وضع نماییم داریم:

$$3x = 6$$

$$3(2) = 6$$

$$6 = 6$$

دیده می شود که $x = 2$ واقعاً حل مساوات فوق می باشد.

تمرین

معادلات زیر را حل کنید:

1) $4x = 2$

2) $x \div 5 = 12$

3) $3x = -6$

4) $\frac{-2}{x} = -4$

5) $\frac{x}{2} = 4$

6) $\frac{4}{x} = -2$

7) $x \div \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

معادله عمومی یک مجهول درجه یک

$$4x + 8 = 0$$

$$4x = -8$$

$$x = ?$$

معلم از شاگردان پرسید.
اگر با چهار چند یک عدد 8 علاوه
گردد مساوی به صفر می شود، عدد
کدام است؟

فعالیت

- آیا برای حل سؤال معلم که به صورت فوق مطرح گردیده است فکر کرده اید؟
- اگر عدد مطلوب سؤال قبلی را x بنامیم، آیا می توانید سؤال فوق را بایک افاده ریاضی بنویسید؟
- چگونه برای دریافت حل آن و یا راه حل آن فکر می کنید؟
- اگر از 3 چند یک عدد، 9 منفی گردد نتیجه مساوی به صفر است افاده الجبری این سؤال را بنویسید.
- چگونه برای دریافت حل این معادله فکر می کنید؟
- اگر با a چند یک عدد، عدد b علاوه گردد نتیجه مساوی به صفر است.
- حل حالت فوق را به صورت عمومی بنویسید و بگویید که عدد چند است؟

از انجام فعالیت بالا نتیجه زیر به دست می آید:

در عملیات مانند فوق مقدار نامعلوم را به x نشان داده، می توان برای آن یک مساوات بر حسب x به دست آوریم.

تساوی را معادله و مقدار نامعلوم را به نام مجهول معادله یاد نموده و روش یافتن مجهول را به نام حل معادله یاد می کنند.

حالت عمومی معادله یک مجهول درجه یک به شکل $ax + b = 0$ بوده، که در آن a و b اعداد حقیقی خلاف صفر اند، بنابر آن شکل فوق بنام حالت معیاری و یا استاندارد معادله خطی یاد می گردد.

حل معادله را توسط عملیه های ساده الجبری با انجام دادن مراحل زیر به دست آورده می توانیم.

- جمع و یا تفریق طرفین معادله با مقدار های مساوی.

- ضرب و یا تقسیم طرفین معادله با مقدار های مساوی خلاف صفر.

با انجام دادن عملیات فوق بعد از محاسبه به جای می رسیم که، مجهول معادله به یک طرف و مقادیر معلوم در طرف دیگر قرار می گیرد و به این ترتیب حل معادله به دست می آید.

مثال 1: معادله $3x - 4 = 5$ را حل کنید.

حل: ابتدا به طرفین معادله عدد 4 را جمع می کنیم:

$$3x - 4 + 4 = 5 + 4 \Rightarrow 3x = 9$$

طرفین معادله را بر 3 تقسیم می کنیم:

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

مثال 2: معادله $2(3x + 4) = -1 - 3x$ را حل کنید.

حل:

$$2(3x + 4) = -1 - 3x$$

$$6x + 8 = -1 - 3x$$

$$6x + 3x + 8 = -1 - 3x + 3x \quad / + 3x$$

$$9x + 8 = -1$$

$$9x + 8 - 8 = -1 - 8 \quad / - 8$$

$$9x = -9$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{-9}{9} = -1 \quad / \div 9$$

$$x = -1$$

تمرین

1- در مثال فوق، قیمتی را که برای x به دست آورده اید؛ در اصل معادله امتحان کنید.

2- حل معادله $2(2x + 3) = 2x - 2$ را به دست آورید.

3- معادله $\frac{3}{2}(4x - 2) = 5x + 2$ را حل کنید.

• معادله

عبارت از مساوات الجبری است که برای بعضی قیمت های معین مجهول صدق می نماید و با استفاده از عملیه های حسابی با لای طرفین معادله مطلوب، مجهول معادله دریافت می گردد.

• عملیه های الجبری و معادله

اگر به اطراف هر معادله یک عدد را جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم (خلاف صفر) نماییم در معادله کدام تغییر وارد نمی شود.

• معادله درجه یک، یک مجهوله

معادله $ax + b = 0$ ، $a \neq 0$ ، در حالی که x مجهول (a و b اعداد حقیقی بوده) به نام معادله درجه یک، یک مجهوله یاد می گردد.

معادله بالا به نام معادله خطی نیز یاد می گردد. و هر معادله خطی، دارای یگانه حل $x = -\frac{b}{a}$ می باشد. $a \neq 0$ ،

تمرینات عمومی

برای هر سؤال زیر چهار جواب داده شده است دور جواب صحیح را حلقه بکشید.
1- حل معادله $10 + x = 18$ عبارت است از:

- | | |
|-------|------|
| a) -8 | b) 8 |
| c) 2 | d) 4 |

2- حل معادله $12x + 2(5x + 22) = 0$ عبارت است از:

- | | |
|------|-------|
| a) 0 | b) 1 |
| c) 2 | d) -2 |

جاهای خالی را با کلمات و اعداد مناسب پر کنید.

1- یک مساوات الجبری که برای بعضی از مجهول ها صدق می نماید..... یاد می شود.

2- آنچه که در حل معادله سراغ آن می باشیم به نام یاد گردیده است.

کدام یک از جملات زیر صحیح و کدام یک آن ها غلط است، در مقابل جمله صحیح حرف (ص) در مقابل جمله غلط حرف (غ) بگذارید.

1 () اگر از هر دو طرف پله ترازو یک مقدار معین را کم و یا به هر دو طرف پله ترازو یک مقدار مساوی را اضافه نماییم باز هم تعادل باقی می ماند.

2 () معادلاتی که دارای حل ها باشند، به نام معادلات غیر مساوی یاد می گردند.

3 () یک مساوات الجبری را که برای بعضی از قیمت های مجهول صدق نماید به نام معادله یاد می گردد.

4 () اگر طرفین یک تساوی را در عدد ضرب یا بر عدد خلاف صفر تقسیم نماییم باز هم مساوات باقی می ماند.

سوالات زیر را مفصلاً حل نمایید:

1- معادلات زیر را حل کنید.

a) $t + 5 = 2$

b) $x - 9 = -5$

c) $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d) $x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

2- حل معادلات زیر مطلوب است:

a) $6y = 2$

b) $-3x = -4$

c) $\frac{x}{2} + 1 = 2$

d) $\frac{3}{t} + 1 = 2$



فصل هشتم

سیستم مختصات کمیات
وضعیه قایم



نقطه در مستوی



آسمان پر از ستاره ها است.
به طرف شمال، شرق، غرب و جنوب
مهتاب، موقعیت ستاره ها را در چهار
اطراف مهتاب چه گونه مشخص
می کنید؟

فعالیت

- دو خط مستقیم (محور) $\overline{XX'}$ و $\overline{YY'}$ را که دارای جهات معین و باهم عمود اند، رسم کنید. نقطه تقاطع را (O) نامگذاری کنید.
 - همین دو محور متقاطع فوق الذکر مستوی را به چند حصه تقسیم می کند.
 - محور $\overline{XX'}$ از مبدا به طرف راست و چپ دارای علامات مثبت و یا منفی اند؟
 - محور $\overline{YY'}$ از مبدا به طرف بالا و پایین دارای علامات مثبت است و یا منفی؟
- از فعالیت فوق تعریف زیر را می توان بیان کرد.

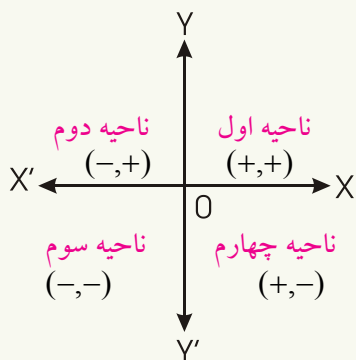
تعریف

در یک مستوی دو محور $\overline{XX'}$ و $\overline{YY'}$ که در نقطه O باهم عمود اند به نام سیستم مختصات قائم یاد می گردد.

$\overline{XX'}$ را به نام محور افقی یا محور فاصله (abscissa) و محور $\overline{YY'}$ را به نام محور عمودی یا ترتیب (ordinate) یاد می کنند.

طرف راست محور افقی $\overline{XX'}$ را از مبدا به حیث جهت مثبت و طرف چپ آن را از مبدا به حیث جهت منفی قبول شده است.

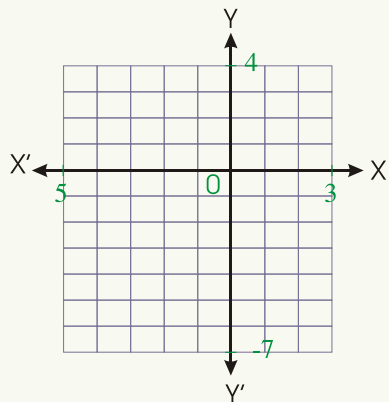
به همین ترتیب طرف بالای محور عمودی $\overline{YY'}$ را از مبدا جهت مثبت و طرف پایین



آن از مبدا به حیث جهت منفی قبول شده است.
محورات سیستم مختصات قایم مستوی را به چهار ناحیه (Quadrant) (حجره) تقسیم می کند.
آن ناحیه (حجره) مستوی که بالای محور افقی $(\overline{X X'})$ و به طرف راست محور عمودی $(\overline{Y Y'})$ واقع است. به نام ناحیه اول و هم چنان ناحیه مستوی که بالای محور افقی و به طرف چپ محور عمودی موقعیت دارد به نام ناحیه دوم به همین قسم آن ناحیه مستوی که طرف پایین محور $(\overline{X X'})$ و طرف

چپ محور $(\overline{Y Y'})$ واقع است به نام ناحیه سوم و بالاخره آن ناحیه مستوی که طرف پایین محور افقی را ست محور عمودی مانند شکل زیر قرار دارد به نام ناحیه چهارم یاد می شود.
مثال 1: علامات $\overline{X X'}$ ، $\overline{Y Y'}$ را در هر چهار ناحیه بنویسید.

حل: در ناحیه اول x و y مثبت اند. $(+, +)$ در ناحیه دوم x منفی اما y مثبت است. $(-, +)$ در ناحیه سوم x و y هر دو منفی اند. $(-, -)$ در ناحیه چهارم x مثبت اما y منفی است. $(+, -)$



مثال 2: هرگاه $x = 3, -5$ و $y = -7, 4$ واحد باشند موقعیت آن را در کمیات وضعیه تعیین کنید.

حل: $x = 3$ از مبدا به طرف راست موقعیت دارد و $x = -5$ از مبدا به طرف چپ موقعیت دارد. $y = -7$ از مبدا به طرف پایین محور y موقعیت دارد و $y = 4$ از مبدا به طرف بالای محور موقعیت دارد.

تمرین

1 - کمیات وضعیه مبدا را بنویسید.

2 - به کدام ناحیه نقطه p محدود است؟ اگر:

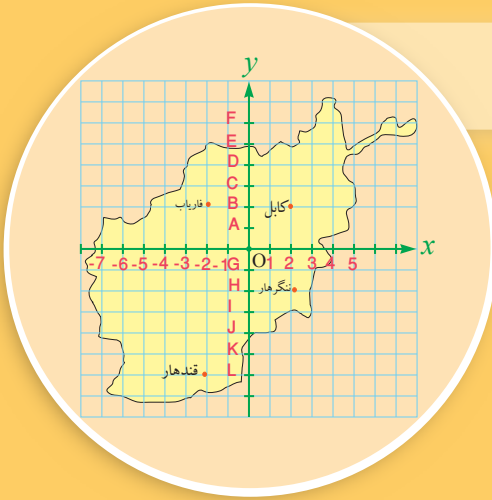
الف: فاصله آن مثبت و ترتیب آن منفی

ب: فاصله آن منفی و ترتیب آن مثبت

ج: فاصله و ترتیب آن هر دو مثبت

د: فاصله و ترتیب آن هر دو منفی باشد.

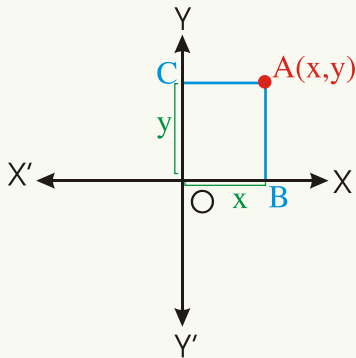
مختصات یک نقطه در مستوی



چهار ولایت افغانستان که در نقشه تعیین شده است، بگویید که در تقاطع کدام حرف و کدام عدد قرار دارند؟
آیا تقاطع هر حرف و عدد یک نقطه افغانستان را نشان می دهد؟

فعالیت

- سیستم مختصات قایم را ترسیم کنید.
 - نقطه A را در ناحیه اول سیستم مختصات قایم تعیین به ترتیب عمودهای AB و AC را به محاورات $\overline{XX'}$ و $\overline{YY'}$ رسم کنید.
 - فاصله نقطه A از مبدأ کمیات وضعیه بالای محور $\overline{XX'}$ کدام نقطه است؟
 - ترتیب نقطه A از مبدأ کمیات وضعیه بالای محور $\overline{YY'}$ کدام نقطه است؟
- از فعالیت فوق نتیجه زیر را می توان بیان کرد.



فواصل B و C از مبدأ (O) به ترتیب فاصله x و y ترتیب نقطه A را از مبدأ ارائه می کنند. یا به عبارت دیگر ترسیم نقطه A بالای محور $\overline{XX'}$ عبارت از نقطه B است فاصله نقطه A را از مبدأ کمیات وضعیه ارائه کرده و به همین قسم ترسیم نقطه A بالای محور $\overline{YY'}$ عبارت از نقطه C است. محاورات را به واحد های یک سانتی متر و هر واحد به صورت ملی متر نشانی کنید.

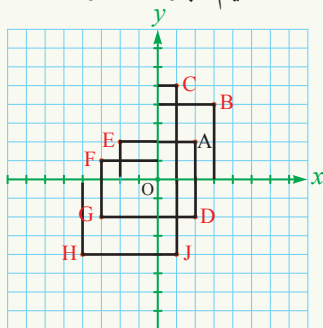
یادداشت: ناگفته نماند که جاهای فاصله و ترتیب یک نقطه را تغییر داده نمی توانیم، در صورت تغییر دادن جاهای فاصله و ترتیب یک نقطه دیگر حاصل می شود.

مثال 1: نقطه A که فاصله آن از مبدأ (O) به اندازه 2 واحد طول و ترتیب آن از مبدأ (O) به قدر 3 واحد طول می باشد، تعیین کنید.

حل: به اندازه 2 واحد طول در جهت مثبت محور $\overline{XX'}$ انتخاب نموده و در این نقطه عمود رسم می کنیم، سپس به اندازه 3 واحد طول در جهت مثبت محور $\overline{YY'}$ انتخاب نموده و بر آن نقطه عمود رسم می کنیم. این دو عمود یکدیگر را در نقطه A که فاصله آن 2 و ترتیب آن 3 واحد است قطع می کنند و مختصه نقطه A را به شکل $A(2,3)$ نشان می دهیم.

مثال 2: ترتیب و فاصله نقاط زیر را که در سیستم مختصات قایم داده شده اند، و مختصات آن نقطه جوړه مرتب، به صورت تشریحی یک جدول بنویسید:

حل: مختصات نقاط به حیث جوړه های مرتب سیستم مختصات قایم عبارت اند از:



$C(1,5)$, $B(3,4)$, $A(2,2)$
 $F(-3,1)$, $E(-2,2)$, $D(1,-2)$
 $J(1,-4)$, $H(-4,-4)$, $G(-3,-2)$

طرز نوشتن جدولی، برای نقاط فوق قرار زیر به دست می آید:

نقاط	A	B	C	D	E	F	G	H	J
x	2	3	5	2	-2	-3	-3	-4	1
y	2	4	1	-2	2	1	-2	-4	-4

تمرین

1- جوړه های مرتب زیر را به شکل جدول بنویسید.

$A(5,5)$, $B(0,3)$, $C(-1,1)$, $D(2,-1)$

2- نقاط $E(1,4)$, $D(-5,-3)$, $C(-1,-2)$, $B(-3,1)$, $A(1,-1)$ را

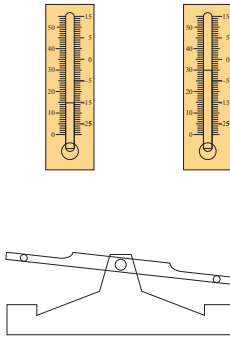
در سیستم مختصات قایم مشخص کنید.

3- مختصات نقاط زیر را دریافت کنید:

(a) نقطه روی محوری x از مبدأ به طرف راست 6 واحد فاصله داشته باشد.

(b) نقطه روی محور y از مبدأ به طرف پایین 5 واحد فاصله داشته باشد.

مجهول و متحول



- با ازدیاد کدام وزن، تعادل ترازو به وجود خواهد آمد؟
- آیا تنها یک وزن است که ترازو برای آن در حالت تعادل قرار می گیرد؟
- در یک شبانه روز درج، حرارت، ثابت است یا متحول؟

فعالیت

مساوات زیر را که دارای دو خانه خالی می باشد در نظر بگیرید:
خانه های خالی را یکی پی دیگر طوری پر نمایید که نخست خانه اولی و بعداً خانه دومی مساوات پر گردد.

خانه دومی خانه اولی

$$2 \times \boxed{} + \boxed{} = 9$$

- اگر در خانه اول عدد، 1 را بگذاریم، عددخانه دوم باید چند باشد؟
- اگر در خانه اول عدد، 2 را بگذاریم، عدد خانه دوم را پیدا کنید.
- آیا می توانیم به خانه اولی هر عددی دیگر را بگذاریم؟
- آیا در برابر قیمت های متغیری که به خانه اول داده اید نظر به معلومات گذشته می توانید نامی برای عدد خانه دومی بگیرید؟

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

- برای انتخاب عدد خانه اول ما امکان آن را داشتیم که عدد دلخواه را انتخاب کنیم، که در برابر آن مجبوریم از روی حل معادله قیمت مجهول را برای خانه دوم به دست آوریم.
- هرگاه در یک مساوات امکان دادن قیمت های مختلف به یک حرف افاده الجبری وجود داشته باشد، حرف مذکور به نام متحول (مجهول) یاد می گردد.
- هرگاه به صورت عمومی متحول قابل تغییر اختیاری نباشد، مجهول نامیده می شود.

مثال: در مساوات $2x - y = 1$ برای متحول x با در نظر داشت جدول زیر قیمت داده که بعد از قیمت گذاری در معادله، قیمت مجهول y به دست می آید:

مثلاً: برای $x = -3$ قیمت

$$2(-3) - y = 1$$

$$-6 - y = 1$$

$$y = -7$$

می باشد.

قیمت های متحول x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
قیمت های مجهول y	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	0	-2

تمرین

1- متحول و مجهول از هم چه فرق دارند؟ با مثال واضح سازید.

2- در سیستم مختصات جوهره های مرتب که در مثال فوق در جدول به دست آمده اند مشخص نموده، نقاط مذکور را با هم وصل کنید.

3- در مساوات $2x - y = 7$ برای متحول x با در نظر داشت جدول زیر بعد از قیمت گذاری مجهول y را به دست آورید.

x	-3	-2	-1	1	2
y					

- **نقطه در مستوی:** یک نقطه را در مستوی می‌توانیم در یک سیستم کمیات وضعیه قایم تعریف نماییم که توسط جوړه مرتب (X, Y) که به نام فاصله و ترتیب یاد می‌گردد مشخص می‌گردد.
- **سیستم مختصات قایم:** دو محور عمود $\overline{XX'}$ و $\overline{YY'}$ که یک دیگر خود را به صورت عمودی در نقطه O قطع می‌کنند. به نام سیستم مختصات قایم یاد می‌گردد که به هر جوړه مرتب (X, Y) آن یک نقطه مستوی ارتباط دارد.
- X را به نام فاصله و Y را به نام ترتیب نقطه یاد می‌کنند. از روی محورات قیمت‌های آن‌ها که به واحداث مساوی تقسیم شده‌اند تعیین می‌گردد.
- **مختصات یک نقطه در مستوی:** به هر نقطه P یک مستوی مختصات قایم تنها یک جوړه مرتب اعداد (X, Y) و برعکس به هر جوړه مرتب اعداد (X, Y) تنها و تنها می‌توان یک نقطه P مستوی مختصات قایم را ارتباط دهیم.
- **مجهول و متحول:** هرگاه در یک مساوات امکان دادن قیمت‌های مختلف به یک حرف افاده الجبری وجود داشته باشد حرف مذکور به نام متحول یاد می‌گردد.
- و هرگاه به صورت کلی متحول قابل تغییر اختیاری و دلخواه نباشد، مجهول نامیده می‌شود.

تمرینات عمومی

- 1- موقعیت نقاط داده شده زیر را در سیستم مختصات قایم مشخص نمایید:
 $D(-1, 4), C(4, -1), B(3, -5), A(1, 5)$
- 2- مختصات 3 نقطه را بنویسید که دارای ترتیب‌های مساوی بوده ولی نقاط روی هم قرار نداشته باشند.