



جمهوری اسلامی افغانستان
وزارت معارف
ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی

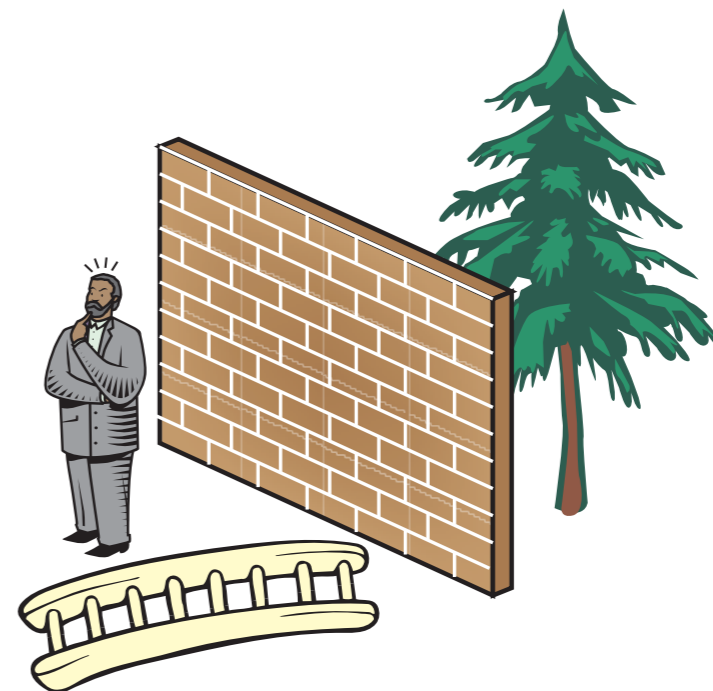
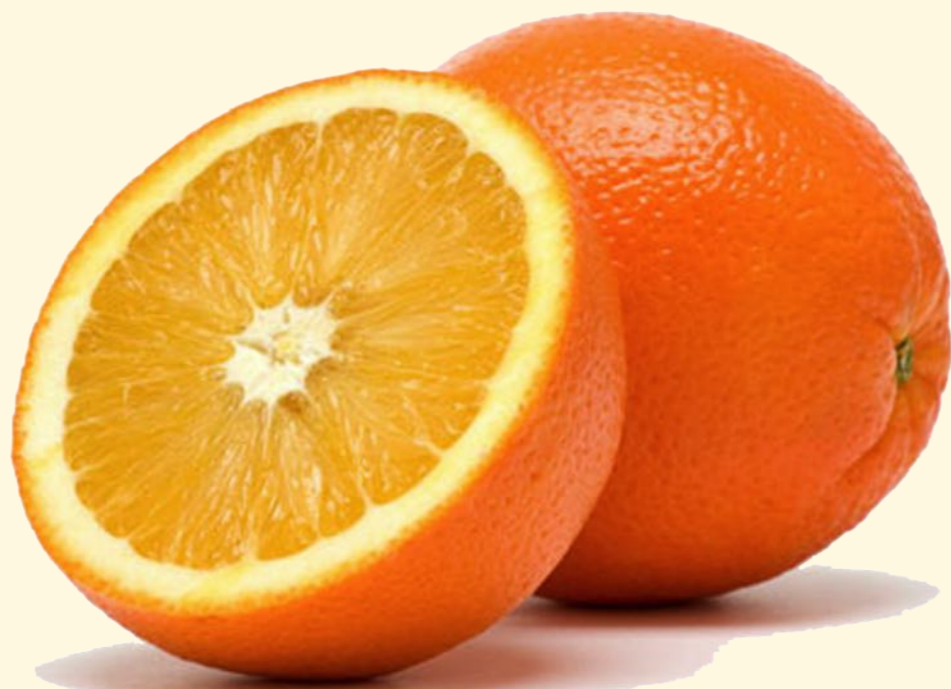
ریاضی

صنف نهم



برای مدارس دینی

ریاضی صنف نهم (برای مدارس دینی)



کتابهای درسی مربوط وزارت معارف بوده، خرید و فروش آن ممنوع است.

curriculum@moe.gov.af

ریاضی صنف

۹

(برای مدارس دینی)

۱۳۹۶

ه.ش

مؤلفان

- سرمولف میرنقیب الله عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- مولف مہناز توخی آمر دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- معاون مولف رحیمہ ہدایت زی عضو علمی دیپارتمنت ریاضی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ادیتوران علمی

- پوهنیار عبیدالله صافی عضو تیم پروژه ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ادیتور زبان

- مؤلف الحاج سید محمد پایمناری عضو دیپارتمنت در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

کمیٹہ دینی، سیاسی و فرهنگی:

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

إشراف:

- دکتور شیر علی ظریفی رئیس پروژه انکشاف نصاب تعلیمی.





سرود ملی

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه بان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل خلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مودی رهبر

بسم الله الرحمن الرحيم

پیام وزیر معارف

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسوله محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين، أما بعد:

نصاب تعلیمی معارف اساس نظام تعلیم و تربیه را تشکیل داده و در رشد و توسعه علمی، فکری و سلوکی نسلهای امروز و فردای کشور نقش بنیادی و سرنوشت ساز دارد. نصاب تعلیمی با گذشت زمان و تحول و پیشرفت در عرصه های مختلف زندگی، مطابق با نیازهای جامعه، باید هم از نظر مضمون و محتوا و هم از نظر شیوه و روش عرضه معلومات، تطور و انکشاف نماید.

یکی از عرصه های نصاب تعلیمی که مورد توجه جدی برای تجدید نظر و بهبود می باشد، نصاب تعلیمات اسلامی است؛ زیرا از یک جانب، فارغان مدارس دینی به حیث پیشوایان معنوی جامعه، باید محور تلاشهای معارف قرار گیرند و از سوی دیگر نصاب تعلیمات اسلامی شامل عقاید، احکام و هدایات دین مبین اسلام است که به حیث نظام و قانون مکمل، تمام ابعاد زندگی انسان ها را در بر گرفته و به عنوان آخرین پیام خالق و پروردگار جهان تا روز قیامت، رسالت رهنمایی و هدایت بشریت را انجام می دهد.

علمای امت اسلامی در طول تاریخ نقش مهمی را در ایجاد، توسعه و غنای سیستم تعلیمات و معارف اسلامی مخصوصاً انکشاف تدریجی نصاب تعلیمی مراکز و مؤسسات علمی جهان اسلام، ایفاء کرده اند.

مطالعه دقیق در سیر تطور تاریخی علوم و معارف اسلامی در جهان نشان می دهد که نصاب تعلیمی مدارس و مراکز علمی ما، همواره بنا بر ضرورت های جامعه و در تطابق با احکام ثابت و پایا بر جای دین اسلام، که برای همه انسانها در همه زمانها و مکانها می باشد، توسعه یافته است.

کشور عزیز ما افغانستان با سابقه درخشان علمی، روزگاری مهد علم و دانش و جایگاه بزرگترین مراکز علمی عصر بوده و در شکل گیری تمدن بزرگ اسلامی نقش عظیمی داشته است، وجود هزاران دانشمند و عالم در عرصه های مختلف علم و فرهنگ مخصوصاً در علوم شرعی مانند عقاید، تفسیر، حدیث، فقه، اصول فقه و غیره، گواه واضح آنچه گفته شد می

باشد.

همزمان با رشد بیداری اسلامی در عصر حاضر، تعلیمات اسلامی در کشور ما شاهد تحول کمی و کیفی بوده و اطفال و جوانان کشور ما با شوق و رغبت فراوان به طرف مدارس و مراکز تعلیمات اسلامی رو می آورند.

وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان بر اساس مسؤولیت و رسالت خویش، در مطابقت با احکام قانون اساسی کشور، به منظور رشد و توسعه کمی و کیفی تعلیمات اسلامی و از جمله نصاب آن، اقدامات قابل توجه نموده است.

درین راستا وزارت معارف با دعوت از علماء، استادان و متخصصین باتجربه و قابل اعتماد کشور، به بهبود و انکشاف نصاب تعلیمی پرداخته و کتابهای رایج مدارس تعلیمات اسلامی، را با شرح و توضیح متون، جا بجا ساختن فعالیتها، ارزیابی و تمرینها با معیارهای کتب درسی عیار ساخت.

امیدوارم این تلاشهای قابل تمجید علماء و متخصصان وزارت معارف، در بهبود و انکشاف هر چه بیشتر تعلیمات اسلامی در افغانستان عزیز مفید واقع شده و سبب کسب رضای خداوند متعال قرار گیرد.

وبالله التوفیق

دکتور میرویس بلخی

وزیر معارف

مقدمه

استادان عالیقدر و شاگردان گرامی،

ریاضی زبان علوم طبیعی است که قوانین طبیعت را فورمول بندی می کند و مسائل مربوط به اعداد و مقادیر را به زبان حساب ارایه می نماید.

انسان ها در زنده گی روز مره به علم ریاضی احتیاج دارند، این علم برای ساینس حیثیت کلید را دارد که اکثر قوانین طبیعت به زبان ریاضی بیان می شود و در مسائل شرعی نیز به علم ریاضی ضرورت می باشد، در تقسیم میراث، تقسیم زمین و دریافت مساحت آن، تعیین حقوق شرکاء، تعیین زکات و غیره موارد، از علم ریاضی استفاده صورت می گیرد.

برای اینکه فارغان مدارس علوم شرعی قابلیت های ضروری داشته باشند، مسائل روزمره زنده گی مربوط ریاضی را حل کرده بتوانند و مسائل مانند میراث، مشارکت، تقسیمات اموال و محتوای مضامین ساینسی را بفهمند، ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان مسائل ضروری ریاضی را در نصاب تعلیمی مدارس جابه جا نمود.

به گونه که ضرورت های اساسی شاگردان مدارس شرعی، تخصص آینده ایشان و ساعات تعیین شده در پلان تعلیمی برای مضمون ریاضی را در نظر گرفته و مسایل ضروری این علم را با در نظر داشت به فن معاصر نصاب نویسی بر میتود آسان و مؤثر تالیف نمود، تا فارغان مدارس شرعی در پهلوی علوم دینی بعضی علوم ضروری دنیوی را نیز فرا گیرند، ظرفیت های شان بلند برود و رول مؤثر و مثمر را در جامعه بازی نمایند.

و الله ولی التوفیق

فهرست

فصل اول: دایره

صفحه

۲۰-۳

- عناصر دایره
- حالات یک خط مستقیم با دایره
- حالات دو دایره نسبت با یکدیگر
- زوایایی مربوط به دایره
- زاویه محیطی دایره
- زاویه مماسی دایره
- خلاصه و تمرین فصل

۴۴-۲۱

فصل دوم، روابط بین دایره و خطوط مستقیم

- طاقت یک نقطه نظر به یک دایره
- خط مماس به دایره
- زاویه داخلی دایره
- زاویه خارجی دایره
- دایره محیطی
- دایره محاطی
- ترسیم مضلع منظم
- محیط و مساحت دایره
- خلاصه و تمرین فصل

۶۲-۴۵

فصل سوم: هندسه تحلیلی

- فاصله بین دو نقطه
- میل خط مستقیم
- میل مستقیم های موازی
- میل مستقیم های عمود با هم
- معادله خط مستقیمی که دو نقطه آن معلوم باشد
- معادله خط مستقیمی که میل و یک نقطه آن معلوم باشد
- خلاصه و تمرین فصل

فهرست

فصل چهارم: مثلثات

- ساین یک زاویه حاده
- کوساین یک زاویه حاده
- تانجنت یک زاویه حاده
- نسبت های مثلثاتی زوایای خاص
- خلاصه و تمرین فصل

صفحه

۷۶-۶۳

فصل پنجم: افاده های الجبری

- ضرب افاده های الجبری
- مجموع و تفاضل مکعبات
- تقسیم افاده های الجبری
- خلاصه و تمرین فصل

۹۲-۷۷

فصل ششم: نامساوات

- حل نامساوت های خطی
- انتروال ها
- تعیین اشاره(علامه)بینوم درجه اول
- خلاصه و تمرین فصل

۱۰۶-۹۳

فصل هفتم: معادلات یک مجهوله درجه دوم

- حل معادلات یک مجهوله درجه دوم
- طریقه تکمیل مربع
- فورمول محمد بن موسی
- خلاصه و تمرین فصل

۱۱۹-۱۰۷

فصل اول دایره







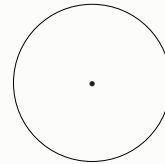
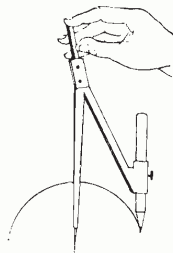
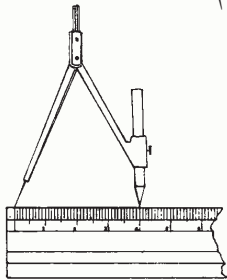
دایره CIRCLE



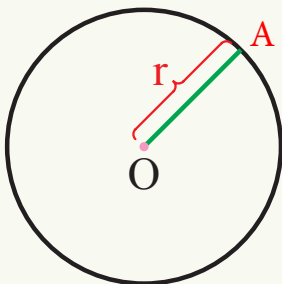
به شکل مقابل توجه کنید اشکال هندسی که در شکل دیده می شود نام بیرید.

فعالیت

یک نقطه را به روی کاغذ تعیین و به اطراف این نقطه به فاصله 4cm پرکار را مکمل دور بدهید شکل تشکیل شده و نقطه تعیین شده چه نام دارد؟

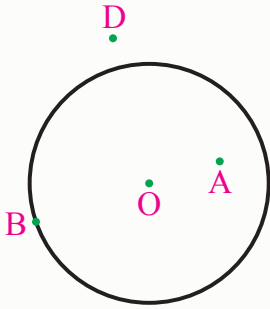


تعریف



ست تمام نقاط یک مستوی که از یک نقطه ثابت فاصله مساوی داشته باشد دایره نامیده می شود. یا به عبارت دیگر دایره منحنی بسته ایست که از یک نقطه ثابت فاصله مساوی داشته باشد. منحنی بسته را به نام محیط دایره و نقطه ثابت را مرکز دایره می گویند و به شکل $C(O, r)$ نمایش داده می شود، در شکل مرکز دایره به حرف (O) و شعاع دایره به حرف r نشان داده شده است.

فعالیت



- در شکل مقابل موقعیت نقاط B, A و D را نظر به دایره تعیین نمایید.
- فاصله نقاط را از مرکز دایره اندازه نموده و با طول شعاع مقایسه کنید.
- سه نقطه دلخواه یکی در داخل دایره، دوم روی دایره و سوم بیرون دایره در نظر بگیرید. آیا رابطه دریافت شده برای این نقاط نیز درست است؟

از انجام فعالیت فوق نتایج زیر به دست می آید:

- 1- ست نقاطی که فاصله آنها از مرکز دایره کوچکتر از شعاع دایره باشد نقاط ساحت داخلی دایره گفته می شوند.
- 2- ست نقاطی که فاصله آنها از مرکز دایره مساوی به شعاع دایره باشد نقاط محیط دایره گفته می شوند.
- 3- ست نقاطی که فاصله آنها از مرکز دایره بزرگتر از شعاع دایره باشد نقاط ساحت خارجی دایره گفته می شوند.
- 4- قسمتی از مستوی که توسط محیط دایره و سطح داخلی آن جدا می شود سطح دایره نامیده می شود.

تمرین

- 1- یک دایره به شعاع 2cm رسم کنید. کدام یک از نقاط زیر در داخل دایره، خارج دایره و یا هم روی محیط دایره قرار دارند:
 - فاصله نقطه A از مرکز دایره 1.4cm است.
 - فاصله نقطه B از مرکز دایره 2.3cm است.
 - فاصله نقطه C از مرکز دایره صفر است.
 - فاصله نقطه D از مرکز دایره $\frac{4}{2}$ cm است.
- 2- توضیح دهید چه وقت یک نقطه روی محیط دایره قرار می گیرد؟

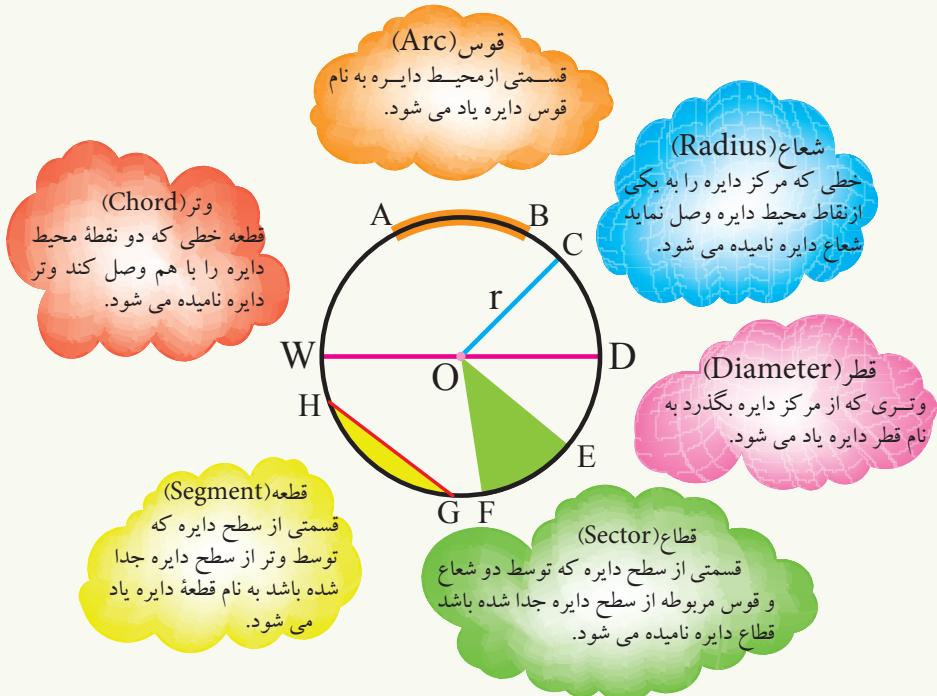


عناصر دایره Elements of a Circle

به شکل مقابل توجه نمایید، کیک کدام شکل هندسی دارد؟ قسمت قطع شده آن کدام عنصر دایره را نشان می دهد؟

تعریف

ابتدا شکل دایره و تعاریفات مربوط عناصر آن را در کتابچه های تان انتقال و بعد تعاریفات مربوطه هر عنصر دایره را با شکل مربوطه آن وصل کنید.



فعالیت

- دایره‌یی را به شعاع 4 سانتی متر رسم بعد دایره مذکور را از کاغذ قیچی کنید.
- این دایره را طوری قات کنید که دو نیم دایره بالای هم قرار گیرند.
- کاغذ را باز نموده خط قات شده‌یی را که روی کاغذ می‌بینید چه نام دارد؟
- این بار دو نیم دایره را دوباره قات نموده آن را باز کنید. طوری که چهار قسمت مساوی تشکیل شود. چند قطعه خط را می‌بینید؟ هر کدام چه نام دارد؟
- چهار زاویه تشکیل شده را اندازه نموده، بگویید که با هم دیگر چه رابطه دارند؟
- رابطه قطر با شعاع دایره چیست؟
- دایره را طوری قات کنید که دو قسمت نامساوی تشکیل شود. آن را باز کنید خط تشکیل شده چه نام دارد؟ اندازه آن را با قطر دایره مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

- همان طوری که دیدیم هر گاه در هر دایره دو نقطه محیط دایره را به هم وصل کنیم یک وتر تشکیل می‌شود.
- در هر دایره بزرگترین وتر، قطر دایره است که دو چند شعاع می‌باشد.
- در یک دایره هر قطر وتر است ولی هر وتر قطر نیست.
- قوسی که از نصف محیط دایره کوچکتر باشد به نام قوس کوچک (minor Arc) یاد می‌گردد.
- قوسی که از نصف محیط دایره بزرگتر باشد، به نام قوس بزرگ (major Arc) یاد می‌گردد.

تمرین

- دایره $C(O,4)$ را رسم نمایید.
- شعاع، قطر، قطعه و قطاع را در شکل نشان دهید.
 - طول قطر دایره را تعیین نمایید.
 - محیط آنرا به چهار حصه مساوی تقسیم نموده، از آن چه نتیجه می‌گیرید.
 - ساحه خارجی، داخلی و محیط دایره را به رنگ‌های مختلف نشان دهید.

حالات یک خط مستقیم با دایره

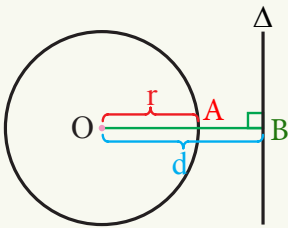


به شکل مقابل توجه نموده و بگویید که قلم ها و بکس هندسی با دایره در کدام حالات قرار دارند هر یک را توضیح دهید.

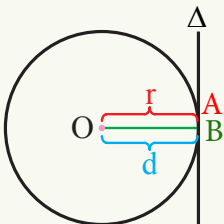
فعالیت

- یک دایره و یک خط مستقیم را طوری رسم نمایید که خط مستقیم با دایره یک نقطه، دو نقطه و هیچ نقطه مشترک نداشته باشد.
- از مرکز دایره به هر یکی از این خطوط عمودها رسم نموده فاصله مرکز دایره الی خط را اندازه نمایید و هر حالت را با شعاع دایره مقایسه نمایید.

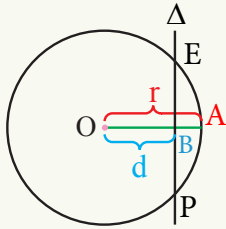
از انجام فعالیت بالا دیده می شود که یک خط مستقیم و دایره نسبت به هم دیگر سه حالت زیر را دارد:



1- اگر مستقیم Δ با دایره هیچ نقطه مشترک نداشته باشد خط مستقیم خارج دایره قرار دارد. در این صورت فاصله خط مستقیم از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است، یعنی: $d > r$

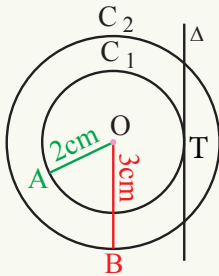


2- اگر مستقیم Δ با دایره یک نقطه مشترک داشته باشد خط مستقیم را به دایره مماس گویند. در این حالت فاصله خط مستقیم از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است، یعنی: $d = r$



3- اگر مستقیم Δ با دایره دو نقطه مشترک داشته باشد مستقیم را قاطع گویند. در این حالت فاصله خط مستقیم از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره بوده، یعنی: $d < r$

مثال: نقطه O را در نظر گرفته دو دایره متحدالمرکز با مرکز O با شعاع 2 و 3 سانتی متر را رسم نمایید. فاصله مستقیم Δ از مرکز دایره به شعاع هر دو دایره C_1 و C_2 چه رابطه دارد؟



حل: در شکل دیده می شود که:

فاصله خط مستقیم (Δ) از مرکز دایره C_1 برابر با شعاع آن دایره است یعنی $d=r$.

فاصله خط مستقیم (Δ) از مرکز دایره C_2 کوچکتر از شعاع دایره است یعنی $d < r$

تمرین

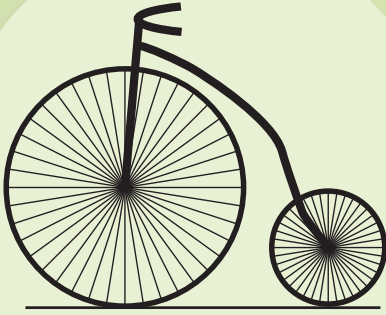
دایره به شعاع 3cm رسم نموده در این دایره خطوطی به فاصله های داده شده زیر رسم و حالت های آنها بیان نمایید.

الف: فاصله خط از مرکز دایره 2.5cm باشد.

ب: فاصله خط از مرکز دایره 4cm باشد.

ج: فاصله خط از مرکز دایره برابر با شعاع دایره باشد.

موقعیت دو دایره نسبت با یکدیگر



- به شکل مقابل توجه نموده بگویید که:
- 1- عرابه بایسکل کدام شکل هندسی را دارد.
 - 2- عرابه ها به چند حالت با یکدیگر قرار گرفته می توانند توضیح دهید.

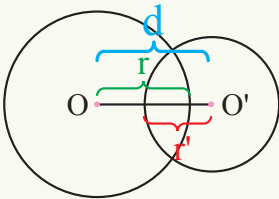
فعالیت

- دو دایره را طوری رسم نمایید که:

 - 1: با هم یک نقطه مشترک داشته باشند. 2: با هم دو نقطه مشترک داشته باشند.
 - 3: با هم هیچ نقطه مشترک نداشته باشند.

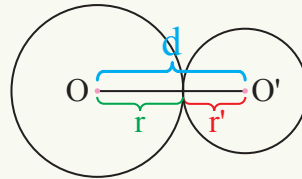
- فاصله مراکز دایره ها را در هر یک از حالات فوق با شعاع آنها مقایسه کنید.

از انجام فعالیت فوق به نتایج زیر میرسیم که:



اگر فاصله بین مراکز دو دایره (d) کوچکتر از مجموع طول شعاع ها و بزرگتر از حاصل تفریق قیمت مطلقه شعاع های دوایر باشد دو دایره با هم متقاطع اند.

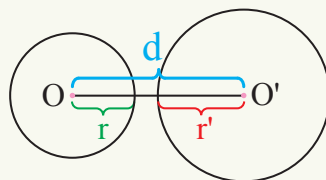
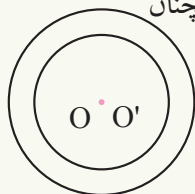
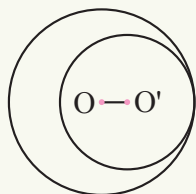
$$|r - r'| < d < r + r'$$



اگر فاصله بین مراکز دو دایره (d) مساوی به مجموع طول شعاع ها باشد در این صورت دو دایره را خارجاً مماس گویند، یعنی:

$$d = r + r'$$

و همچنان



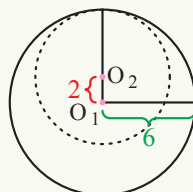
اگر فاصله بین مراکز دو دایره مساوی به حاصل تفریق قیمت مطلقه شعاع‌های دو دایره باشد دوایر را داخلی مماس گویند، یعنی: $d = |r - r'|$

اگر فاصله بین مراکز دو دایره صفر باشد به نام دوایر متحد‌المركز یاد می‌شوند، یعنی: $d = 0$

اگر فاصله بین مراکز دو دایره بزرگتر از مجموع طول شعاع‌های دوایر باشد، در این صورت دوایر را غیر متقاطع گویند، یعنی: $d > r + r'$

مثال: دو دایره را طوری رسم نمایید که شعاع دایره اولی 6unit، فاصله مرکز دایره دوم از مرکز دایره اول 2unit و شعاع دایره دوم $\frac{2}{3}$ شعاع دایره اول باشد. در این حالت دو دایره نسبت به هم کدام حالت دارند؟
حل: اگر شعاع دایره اول را r_1 و شعاع دایره دوم را r_2 بنامیم خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} r_1 = 6\text{unit} \\ r_2 = \frac{2}{3}r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_2 = \frac{2}{3} \cdot 6\text{unit} \\ r_2 = 4\text{unit} \end{array}$$



چون: $d = |r_1 - r_2| = |6 - 4| = |2| = 2$
 بنابراین دوایر با هم داخلی مماس‌اند.

تمرین

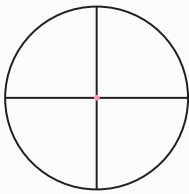
- دو دایره به شعاع‌های 6cm و 4cm را در نظر گرفته طور زیر آن‌ها را رسم نمایید.
- الف: دوایر خارجاً مماس باشند.
 - ب: دوایر داخلی مماس باشند.
 - ج: دوایر متقاطع باشند.
 - د: دوایر غیر متقاطع باشند.
 - ه: دوایر متحد‌المركز باشند.
 - و: حالات فوق را به زبان بیان نمایید.



زوایایی مربوط به دایره Angles of a Circle

به تصویر مقابل توجه نمایید:
اشکال هندسی که در آن مشاهده
میگرد نام ببرید.

فعالیت



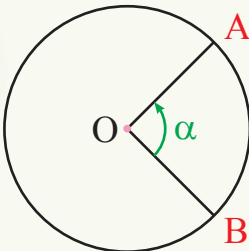
- در شکل ورودی چند زاویه دیده می شود؟
- خصوصیات مشترک این زوایا چیست؟ بیان دارید.
- یک دایره کیفی رسم کنید.
- دو قطریکه بالای یکدیگر عمود باشند در این دایره رسم نمایید.
- چند زاویه مرکزی تشکیل می گردد؟ اندازه قوس مقابل هر زاویه چند درجه است؟
- محیط این دایره چند درجه است؟

از نتیجه فعالیت فوق می توانیم بنویسیم:

$$\frac{\text{طول قوس}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\hat{AOB}}{360^\circ}$$

طول یک قوس به وسعت زاویه مرکزی آن ارتباط دارد یعنی:

تعریف



زاویه که رأس آن در مرکز دایره و اضلاع آن از دو شعاع
دایره تشکیل شده باشد به نام زاویه مرکزی یاد می گردد،
مانند زاویه AOB یا زاویه α .

اضلاع هر زاویه مرکزی از محیط دایره یک قوس را جدا می نماید که این قوس مساوی به زاویه مرکزی می باشد مانند قوس \widehat{AB} که مساوی به زاویه α است. بناءً می گوئیم که: اندازه قوس مقابل زاویه مرکزی در دایره بر حسب درجه مساوی به زاویه مرکزی است.

$$\widehat{AOB} = \widehat{AB} = \alpha \quad \text{یعنی:}$$

مثال: در دایره $C(O, r)$ قوس بزرگ (major Arc) پنج چند قوس کوچک (minor Arc) است. اندازه قوس کوچک، اندازه قوس بزرگ و زاویه مرکزی مقابل آنها را دریابید.

حل: اگر قوس کوچک $\widehat{PQ}_{\text{minor}} = x$ باشد پس قوس بزرگ آن $\widehat{PAQ}_{\text{major}} = 360^\circ - x$ است. لذا می توانیم بنویسیم که:

$$\widehat{PQ} + \widehat{PAQ} = 360^\circ$$

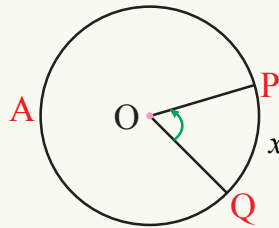
$$\widehat{PAQ}_{\text{maj}} = 5\widehat{PQ}_{\text{min}}$$

$$x + 5x = 360^\circ$$

$$6x = 360^\circ$$

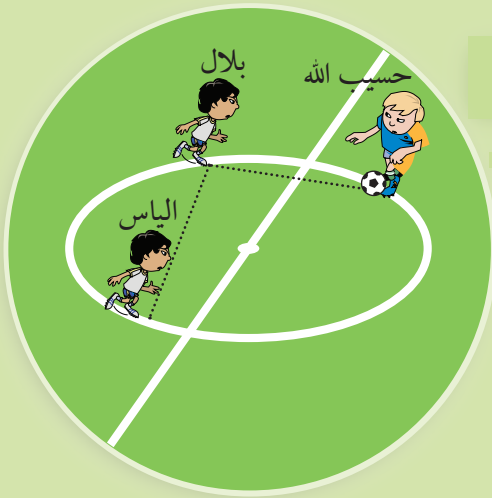
$$x = 60^\circ \Rightarrow \widehat{POQ} = x = 60^\circ$$

$$\widehat{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$$



تمرین

سه نقطه A, B, C بالای محیط دایره $C(O, r)$ طوری قرار دارند اگر $\widehat{AOB} = 75^\circ$ و $\widehat{BOC} = 136^\circ$ دو زاویه دو طرفه خط OB باشد اندازه قوس \widehat{AC} را دریافت نمایید.

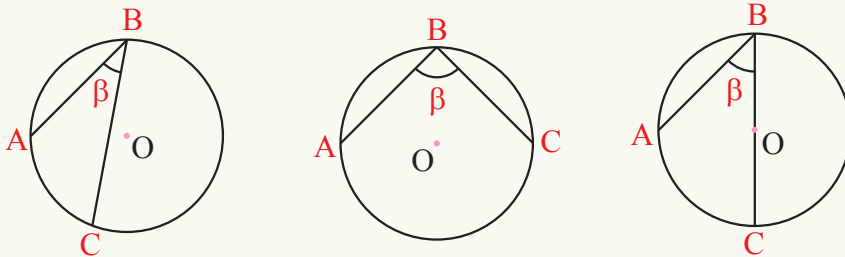


زاویه محیطی دایره Inscribed Angel of Circle

در شکل مقابل در دایره مرکزی میدان فوتبال، حسین الله به بلال و بلال به الیاس توپ را پاس میدهد. شکلی که از مسیر پاس دادن توپ تشکیل میگردد نام بگیرد.

تعریف

زاویه که رأس آن بالای محیط دایره واقع باشد و اضلاع آن از دو وتر دایره تشکیل شده باشد زاویه محیطی نامیده می شود؛ مانند: زاویه ABC یا زاویه β اشکال زیر:

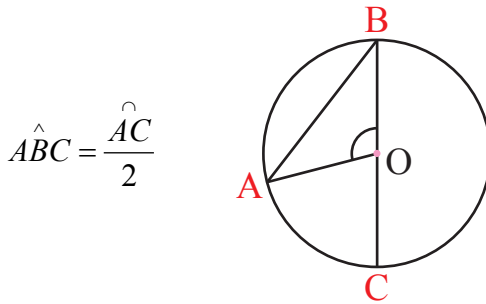


فعالیت

- در دایره $C(O, r)$ زاویه محیطی \hat{ABC} را طوری رسم کنید که ضلع \overline{BC} آن بالای قطر دایره واقع باشد.
- نقطه A را به مرکز دایره O وصل نمایید. چه نوع مثلث تشکیل می شود؟
- زوایای A و B در مثلث OAB با هم چه ارتباط دارند؟
- زاویه AOC و زوایای A و B چه نوع زوایای اند، نام ببرید؟

نتیجه فعالیت فوق را می توانیم این طور بیان نماییم:

وسعت هر زاویه محیطی مساوی به نصف قوس مقابل آن می باشد.



$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

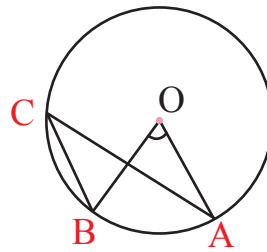
وسعت زاویه محیطی ABC برابر به $\frac{1}{2} \widehat{AC}$ است.

مثال: در دایره $C(O, r)$ اگر زاویه مرکزی $\widehat{AOB} = 60^\circ$ باشد طول قوس AB و اندازه زاویه محیطی \widehat{ACB} را دریابید.

حل: در یک دایره از رابطه بین زاویه مرکزی و قوس مقابل آن نوشته کرده می توانیم که:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} = 60^\circ \\ \widehat{AOB} = \widehat{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

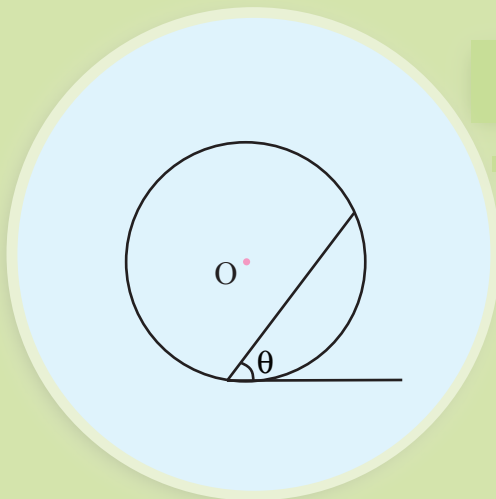
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ACB} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



تمرین

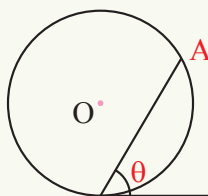
- 1- در یک دایره زاویه محیطی را رسم کنید که اندازه آن 90° باشد؟
- 2- دو نقطه A و B را روی محیط دایره در نظر بگیرید. چند زاویه محیطی مساوی مقابل به قوس AB وجود دارد؟

زاویه مماسی دایره



به شکل مقابل نگاه کنید خطوط مستقیمی که زاویه θ را تشکیل نموده نام بگیرید و بگویید که رأس زاویه در کدام قسمت دایره واقع است؟

تعریف



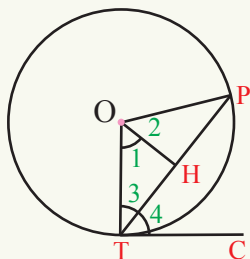
زاویه که یک ضلع آن با دایره مماس، ضلع دیگر آن وتر دایره بوده و رأس آن در نقطه تماس بالای محیط دایره قرار داشته باشد زاویه مماسی گفته می شود، مانند زاویه θ در شکل مقابل.

فعالیت

- دایره $C(O, r)$ را ترسیم نمایید.
- به دایره متذکره یک زاویه مماسی رسم نمایید.
- انجام های وتر دایره را به مرکز دایره وصل نموده و بگویید چه نوع مثلث تشکیل می گردد؟
- از مرکز دایره بالای وتر یک عمود رسم نمایید.
- اندازه زاویه مرکزی و زاویه مماسی را باهم مقایسه کنید.

نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می نمایم.
در یک دایره وسعت هر زاویه مماسی مساوی به نصف قوس مقابل آن است.

$$\widehat{PTC} = \frac{\widehat{PT}}{2}$$



مثال 1: در شکل زیر اگر در دایره $C(O, r)$ زاویه مرکزی 45° باشد وسعت زوایای محیطی و مماسی را دریابید.

حل: با استفاده از رابطه بین زاویه مرکزی و قوس مقابل آن می توانیم بنویسیم که:

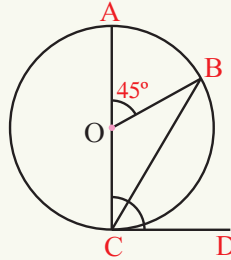
$$\widehat{AOB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 45^\circ$$

$$\widehat{BOC} = 180^\circ - 45^\circ$$

$$\widehat{BOC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 135^\circ$$

$$\widehat{BCD} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$

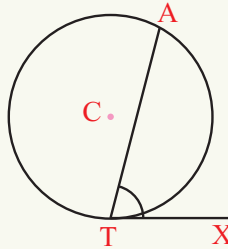


مثال 2: در شکل زیر اندازه قوس AT ، $(2\alpha - 6)^\circ$ است. اندازه زاویه مماسی ATX را دریابید.

حل: با استفاده از رابطه وسعت زاویه مماسی با قوس مقابل آن می توانیم بنویسیم که:

$$\widehat{ATX} = \frac{1}{2} \widehat{AT}$$

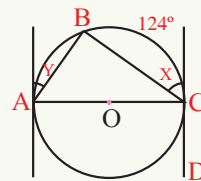
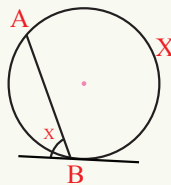
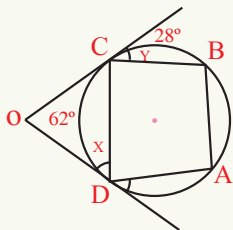
$$\begin{aligned} \widehat{ATX} &= \frac{1}{2}(2\alpha - 6)^\circ \\ &= (\alpha - 3)^\circ \end{aligned}$$



زاویه های مماسی و محیطی که به مقابل عین قوس واقع باشند باهم مساوی اند. زاویه مماسی نصف قوس مقابل آن است.

تمرین

اندازه زاویه های مماسی را در شکل های زیر به دست آرید.



- **دایره:** ست تمام نقاط یک مستوی که از یک نقطه ثابت فاصله مساوی داشته باشند دایره نامیده می شود.
- ست تمام نقاطی که فاصله آنها از مرکز دایره کوچکتر از شعاع دایره باشد نقاط ساحه داخلی دایره گفته می شوند.
- ست تمام نقاطی که فاصله آنها از مرکز دایره مساوی به شعاع دایره باشد نقاط محیط دایره گفته می شوند.
- ست تمام نقاطی که فاصله آنها از مرکز دایره بزرگتر از شعاع دایره باشد نقاط ساحه خارجی دایره گفته می شوند.
- **قسمتی** از مستوی که توسط محیط دایره احاطه شده باشد سطح دایره نامیده می شود.
- **شعاع دایره:** خطی که مرکز دایره را به یکی از نقاط محیط دایره وصل نماید شعاع دایره نامیده می شود.
- **وتر دایره:** قطعه خطی که دو نقطه محیط دایره را با هم وصل نماید وتر دایره نامیده می شود.
- **قطر دایره:** وتری که از مرکز دایره بگذرد قطر دایره نامیده می شود.
- **قوس دایره:** یک قسمت از محیط دایره که توسط دو نقطه مشخص شده باشد به نام قوس دایره یاد می شود.
- **مماس دایره:** خط مستقیمی که با دایره تنها یک نقطه مشترک داشته به نام مماس دایره یاد می شود.
- **قطعه دایره:** قسمتی از سطح دایره که توسط وتر از سطح دایره جدا شده باشد قطعه دایره یاد می شود.
- **قطاع دایره:** قسمتی از دایره که توسط دو شعاع و قوس مربوط از سطح دایره جدا شده باشد قطاع دایره نامیده می شود.
- اگر یک خط مستقیم با دایره یک نقطه مشترک داشته باشد مماس و اگر دو نقطه مشترک داشته باشد قاطع گفته می شود.
- **زاویه مرکزی:** زاویه که رأس آن در مرکز دایره و اضلاع آن از شعاع دایره تشکیل شده باشد زاویه مرکزی گفته می شود.
- اندازه وسعت هر زاویه مرکزی مساوی به قوس مقابل آن است.

• طول قوس مقابل زاویه مرکزی \widehat{AOB} از رابطه $\frac{\widehat{AOB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس}}{\text{محیط دایره}}$ به دست می آید.

• **زاویه محیطی:** زاویه که رأس آن در محیط دایره واقع بوده و اضلاع آن از دو

وتر دایره تشکیل شده باشد، زاویه محیطی نامیده می شود.

• در یک دایره زوایای مرکزی که مقابل وترهای مساوی واقع باشند باهم مساوی اند.

• وسعت هر زاویه محیطی مساوی به نصف قوس مقابل که توسط آن قطع شده می باشد.

• هر زاویه محیطی نصف زاویه مرکزی است که به مقابل عین قوس واقع باشد.

• **زاویه مماسی:** زاویه که یک ضلع آن با دایره مماس و ضلع دیگر آن وتر دایره بوده و رأس آن در نقطه تماس قرار داشته باشد زاویه مماسی گفته می شود.

• وسعت هر زاویه مماسی مساوی به نصف قوس مقابل آن است.

• وسعت زوایایی مماسی و محیطی که مقابل عین قوس واقع باشد با هم مساوی اند.

• هر زاویه مماسی نصف زاویه مرکزی بوده که به مقابل عین قوس واقع باشند.

• **موقعیت دو دایره با همدیگر:**

– اگر فاصله بین مراکز دو دایره بزرگتر از مجموع طول شعاع‌های دایره باشد دایره را غیرمتقاطع می گویند.

– اگر فاصله بین مراکز دو دایره برابر به مجموع طول شعاع‌های دایره باشد دایره را خارجاً مماس می گویند.

– اگر فاصله بین مراکز دو دایره کوچکتر از مجموعه طول شعاع‌های دایره و بزرگتر از قیمت مطلقه حاصل تفریق شعاع‌های دایره باشد دایره را متقاطع می گویند.

– اگر فاصله بین مراکز دایره مساوی به قیمت مطلقه حاصل تفریق شعاع‌های دایره باشد دایره را با هم داخل مماس می گویند.

– اگر فاصله بین مراکز دو دایره صفر باشد دایره را متحد‌المرکز می گویند.

تمرینات فصل اول

• در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- طول قطر دایره مساوی است به:

- (a) $3r$ (b) π (c) 2π (d) $2r$

2- دایره به شکل زیر نمایش داده می شود:

- (a) 0 (b) (1,2) (c) (b,a) (d) C(o,r)

3- خط مستقیم که با دایره یک نقطه مشترک داشته باشد به نام:

(a) وتر یاد می شود. (b) مماس یاد می شود.

(c) قاطع یاد می شود (d) محیط یاد می شود.

4- اگر یک خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع کند آنرا:

(a) مستقیم و دایره گویند. (b) مماس گویند.

(c) قاطع گویند. (d) موازی گویند.

5- یک خط مستقیم با دایره در یک مستوی چند حالت دارد؟

- (a) 3 (b) 7 (c) 4 (d) 1

6- زاویه که رأس آن بالای محیط و اضلاع آن وترهای دایره باشند:

(a) زاویه مرکزی است. (b) زاویه مماس است.

(c) زاویه محیطی است.

• جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- قسمتی از سطح دایره که توسط وتر از دایره جدا می شود.....

..... دایره نامیده می شود.

2- بزرگترین وتر دایره است.

3- ست نقاطی که آنها از مرکز دایره کوچکتر از شعاع

دایره باشد ساحة دایره گفته می شود.

4- وقتی که خط مستقیم با دایره هیچ مشترک نداشته باشد

..... دایره گفته می شود.

5- در هر مثلث قائم الزاویه وتر مساوی به مجموعۀ مربعات

اضلاع است.

6- در هر دایره وتریکه به مرکز نزدیکتر است می باشد.

• کدام یک از جملات زیر صحیح و کدام‌ها غلط‌اند در مقابل صحیح حرف (ص) و در مقابل غلط حرف (غ) بگذارید.

1- () ست تمام نقاط یک مستوی که از یک نقطهٔ مستقر (O) به نام مرکز به اندازهٔ r فاصلهٔ مساوی داشته باشد، دایره نامیده می‌شود.

2- () معمولاً دایره را به نام محیط آن یاد می‌کنند.

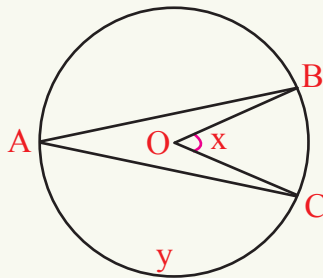
3- () قطعه خطی که دو نقطهٔ محیط دایره را وصل می‌کند قطر نامیده می‌شود.

4- () شعاع دایره نصف قطر است.

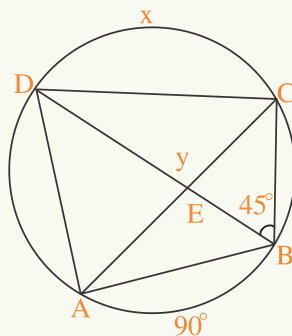
5- () در رابطهٔ $d, d = 2r$ قطر و r شعاع دایره است.

• سؤالات زیر را حل نمایید.

1- در شکل زیر اگر $\hat{y} = 155^\circ$ و $\hat{AB} = 155^\circ$ باشد \hat{x} را دریابید.



2- در شکل زیر اندازه‌های x و y را دریابید.

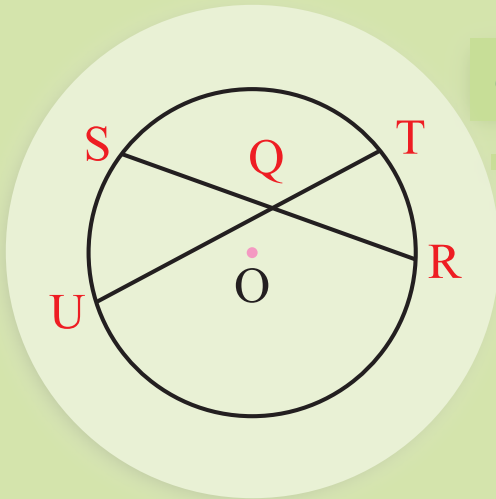


فصل دوم

روابط بین دایره و
خطوط مستقیم



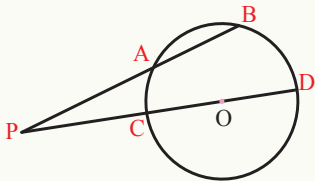
طاقث يك نقطه نظر به يك دايره



به شكل مقابل توجه كنيد.
آيا در اين شكل تساوى زير حقيقت
دارد؟

$$\overline{QR} \cdot \overline{QS} = \overline{QU} \cdot \overline{QT}$$

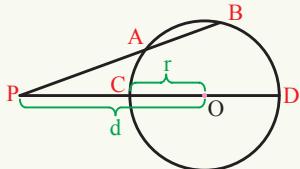
فعاليت



- از نقطه مستقر P كه در خارج دايره $C(O, r)$ قرار دارد قاطع \overline{PB} را رسم نماييد.
- از نقطه P قاطع ديگرى \overline{PD} را طورى رسم نماييد كه از مركز دايره $C(O, r)$ بگذرد.
- نسبت بين قطعات \overline{PB} و \overline{PD} را بنويسيد.
- در رابطه بالا فاصله هاى \overline{PD} و \overline{PC} را بر حسب فواصل تا مركز دايره بنويسيد.
- اگر فاصله نقطه P از مركز دايره d و شعاع دايره r بناميم رابطه بالا را بر حسب d و r بنويسيد.

نتيجه فعاليت فوق را طور زير بيان مى نماييم:

اگر از يك نقطه خارج به دايره دو قاطع طورى رسم گردد كه قاطع دومى از مركز دايره بگذرد در اينصورت حاصل ضرب قطعات قاطع اولى مساوى به يك مقدار ثابت $d^2 - r^2$ بوده كه در آن، d فاصله نقطه ثابت از مركز



دايره و r شعاع دايره است.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2$$

تعریف

رابطهٔ اخیر به نام طاقث یک نقطهٔ P نظر به یک دایره $C(O, r)$ یاد می‌شود و مقدار $d^2 - r^2$ ثابت می‌باشد که به شکل $P_{(o)} = d^2 - r^2$ نیز آنرا نمایش می‌دهند.

مثال: اگر قطر یک دایره 10cm باشد، یک نقطهٔ P به فاصله 13cm از مرکز دایره قرار دارد طاقث نقطهٔ P را نظر به دایرهٔ $C(O, r)$ دریابید.

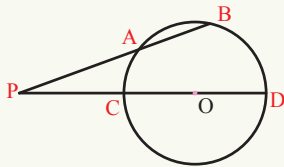
حل: چون قطر دایره داده شده بناءً ابتدا شعاع دایره را دریافت نموده بعداً طاقث نقطهٔ P را نظر به دایره دریافت می‌نماییم:

$$r = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$P_{(o)} = d^2 - r^2$$

$$P_{(o)} = (13)^2 - (5)^2$$

$$P_{(o)} = 169 - 25 \Rightarrow P_{(o)} = 144$$



• اگر طاقث یک نقطه نظر به یک دایره مثبت باشد نقطه خارج دایره قرار دارد. شکل مقابل، یعنی:

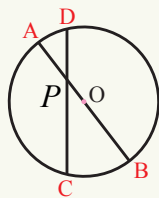
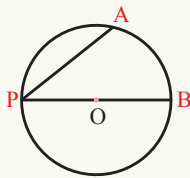
$$P_{(o)} = d^2 - r^2 > 0 \Rightarrow d^2 > r^2$$

• اگر طاقث یک نقطه نظر به یک دایره صفر باشد نقطه بالای محیط دایره واقع است، یعنی:

$$P_{(o)} = d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow d^2 = r^2$$

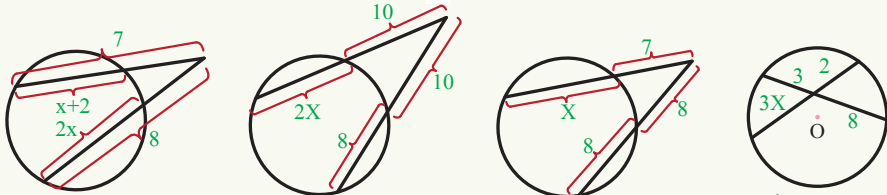
• اگر طاقث یک نقطه نظر به یک دایره کوچکتر از صفر یا منفی باشد نقطه در داخل دایره واقع است، یعنی:

$$P_{(o)} = d^2 - r^2 < 0 \Rightarrow d^2 < r^2$$



تمرین

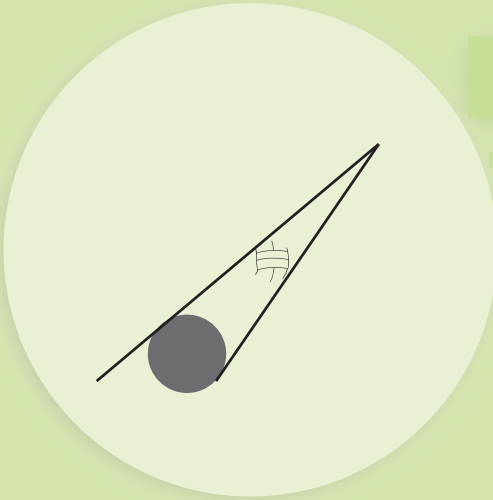
1- در اشکال زیر قیمت‌های X را دریابید.



2- طاقث یک نقطه را در حالات زیر پیدا کنید.

(الف) اگر $d=7$ و $r=4$ باشد (ب) اگر $d=3$ و $r=3$ باشد (ج) اگر $d=3$ و $r=5$ باشد

خط مماس به دایره

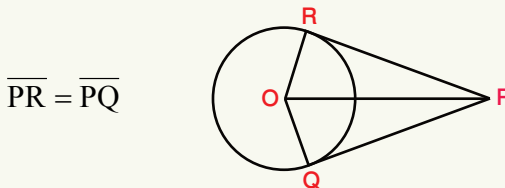


به شکل مقابل توجه کنید:
هر گاه حرکت اشعه نور را به صورت
مستقیم قبول نماییم این خطوط نسبت
به توپ و سایه آن چه رابطه دارد؟

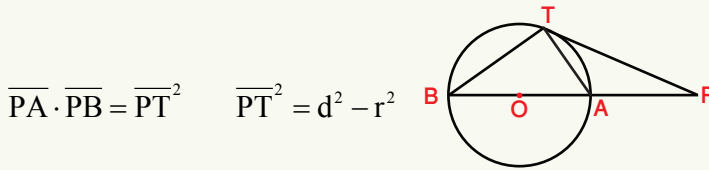
فعالیت

- از یک نقطه خارج دایره P به دایره $C(O, r)$ دو مماس \overline{PR} و \overline{PQ} را رسم نمایید.
- نقاط Q و R نقاط تماس خط مماس با دایره اند. آیا مماس دیگری از نقطه P به دایره رسم شده می تواند؟
- نقطه O را به نقاط Q، R، و P وصل نمایید.
- مثلث های تشکیل شده با هم چه رابطه دارند؟
- آیا طول مماس های رسم شده با هم مساوی اند؟

نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می نمایم.
اگر از یک نقطه خارج دایره به دایره دو مماس رسم گردد طول این مماس ها با هم
مساوی می باشند.



هر گاه از یک نقطه خارج دایره یک خط قاطع و یک خط مماس رسم گردد مربع
مماس مساوی به طاقت نقطه نظر به دایره است.

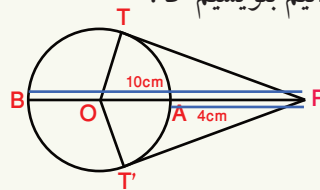


$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \quad \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

مثال: در شکل زیر طول PT و PT' را به دست آرید.

حل: می دانیم که رابطه بین مماس و یک قاطع عبارت از $PA \cdot PB = PT^2$ است لذا می توانیم بنویسیم که:

$$\begin{array}{l|l} PA = 4\text{cm} & PT^2 = PA \cdot PB \\ PB = 10\text{cm} & PT^2 = 4 \times 10 = 40 \\ PT = ? & PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm} \\ PT' = ? & \end{array}$$



می دانیم وقتی که از یک نقطه خارج دایره به دایره دو مماس رسم شود، طول این

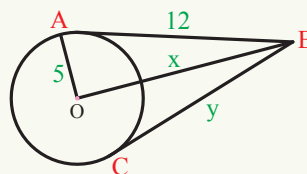
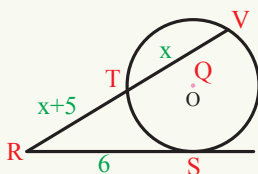
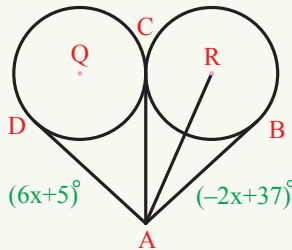
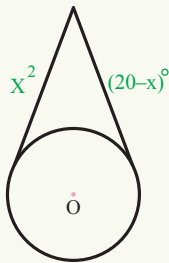
$$PT = PT' = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm} \quad \text{مماس ها با هم مساوی است.}$$

- اگر از یک نقطه خارج یک دایره دو مماس به دایره مذکور رسم گردد طول این مماس ها باهم مساوی است.

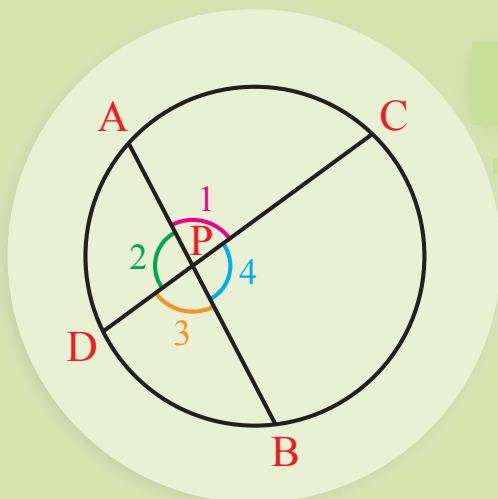
- هرگاه از یک نقطه خارج یک دایره یک خط قاطع و یک خط مماس به دایره مذکور رسم گردد. مربع مماس مساوی به طاقت نقطه نظر به دایره است.

تمرین

در اشکال زیر قیمت های x را به دست آورید.



زاویه داخلی دایره



دو وتر متقاطع را در داخل دایره رسم کنید و بگویید که چند زاویه تشکیل شده و چه نام دارند؟

تعریف

زوایای که از تقاطع دو وتر در داخل دایره تشکیل شده باشند به نام زوایای داخلی دایره یاد می‌شوند. مانند زوایای $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ شکل فوق.

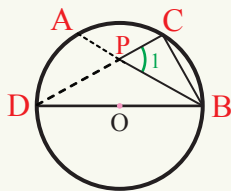
فعالیت

- دایره $C(O,r)$ را رسم و در آن دو وتر AB و CD را طوری رسم نمایید که در نقطه P یکدیگر را قطع نمایند. زوایای تشکیل شده چه نام دارند؟
- نقطه D و C را به B وصل نمایید در مثلث PDB زاویه خارجی CPB مثلث با دو زاویه غیر مجاور چه رابطه دارد.

نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم.

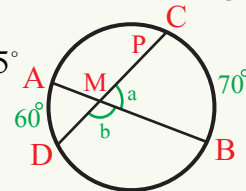
وسعت هر زاویه داخلی دایره مساوی به نصف مجموعه قوس‌هایی که توسط اضلاع زاویه و امتداد یافته اضلاع این زاویه قطع شده باشند می‌باشد.

$$\hat{CPB} = \frac{1}{2}(\hat{AD} + \hat{BC})$$



مثال 1: به کمک شکل پایین وسعت زوایای \hat{a} و \hat{b} را دریابید.
حل: وسعت هر زاویه داخلی دایره مساوی به نصف مجموعه قوس‌های متقابل زاویه و امتداد یافته اضلاع این زاویه است، لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{CMB} = \hat{a} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{60 + 70}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - \hat{a} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$


مثال 2: در شکل زیر قیمت X و اندازه زاویه \widehat{NTM} را تعیین کنید.
حل: با استفاده از رابطه وسعت زوایای داخلی یک دایره می‌توانیم بنویسیم که:

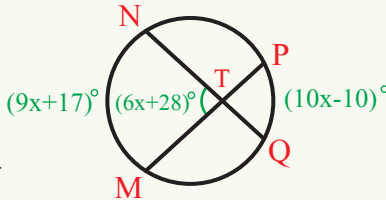
$$\widehat{NM} = 9x + 17 \quad , \quad \widehat{PQ} = 10x - 10$$

$$\widehat{NTM} = 6x + 28 \Rightarrow \widehat{NTM} = \frac{\widehat{NM} + \widehat{PQ}}{2}$$

$$6x + 28 = \frac{9x + 17 + 10x - 10}{2} \Rightarrow 12x + 56 = 19x + 7$$

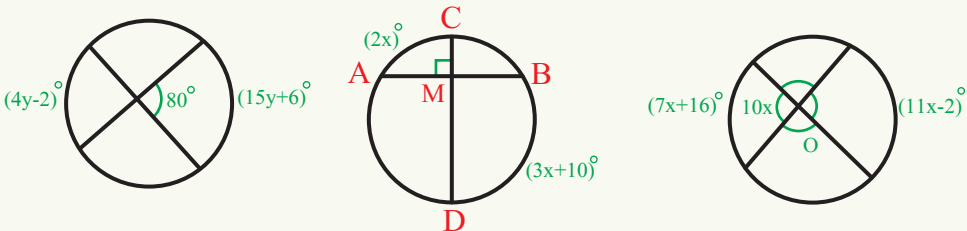
$$12x - 19x = 7 - 56 \Rightarrow -7x = -49 \Rightarrow x = 7$$

$$\widehat{NTM} = 6x + 28 = 6 \cdot 7 + 28 = 42 + 28 = 70$$

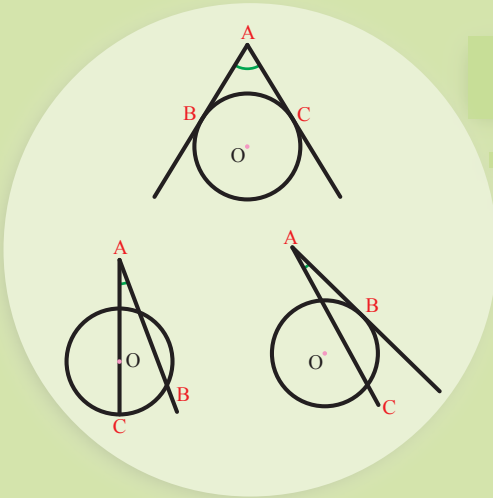
$$\widehat{NTM} = 70^\circ$$


تمرین

در اشکال زیر قیمت‌های X و Y را محاسبه کنید.



زاویه خارجی دایره



در اشکال مقابل قطعه خط ها و
زوایایی مقابل را نام ببرید.

تعریف

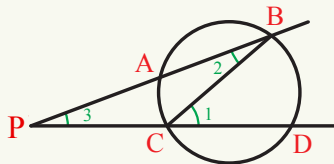
زاویه‌یی که از تقاطع دو خط قاطع، دو خط مماس و یا یک خط قاطع و یک خط مماس در خارج دایره تشکیل گردیده باشد به نام زاویه خارجی دایره یاد می‌شود.

فعالیت

- در دایره $C(O, r)$ دو وتر غیرموازی AB و CD را امتداد می‌دهیم که زاویه خارجی BPD را تشکیل دهد. نقطه C را به B وصل نمایید.
- زاویه خارجی مثلث BPC یعنی $\hat{1}$ با دو زاویه غیر مجاور مثلث چه ارتباط دارد؟

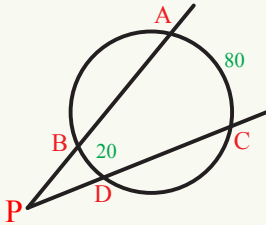
نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم.
وسعت زاویه خارجی یک دایره مساوی به نصف تفاضل قوس‌هایی است که توسط وترها قطع می‌گردد.

$$\hat{BPD} = \frac{1}{2}(\hat{BD} - \hat{AC})$$



مثال: در شکل زیر وسعت زاویه APC را دریابید.

در حالیکه $\widehat{AC} = 80^\circ$ و $\widehat{BD} = 20^\circ$ باشد:



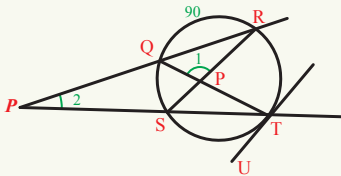
حل: با استفاده از وسعت زاویه خارجی دایره می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\widehat{APC} &= \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD}) \\ &= \frac{1}{2}(80 - 20)^\circ = \frac{1}{2}60^\circ\end{aligned}$$

$$\widehat{APC} = 30^\circ$$

تمرین

در شکل های زیر زاویه های نامعلوم را دریابید.

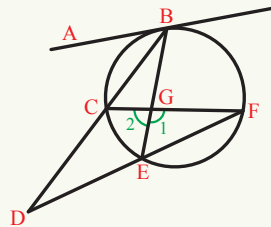


$$\widehat{QR} = 120^\circ$$

$$\widehat{RT} = 90^\circ$$

$$\widehat{QS} = 50^\circ$$

$$\widehat{STU} = ? , \quad \widehat{1} = ? , \quad \widehat{2} = ?$$



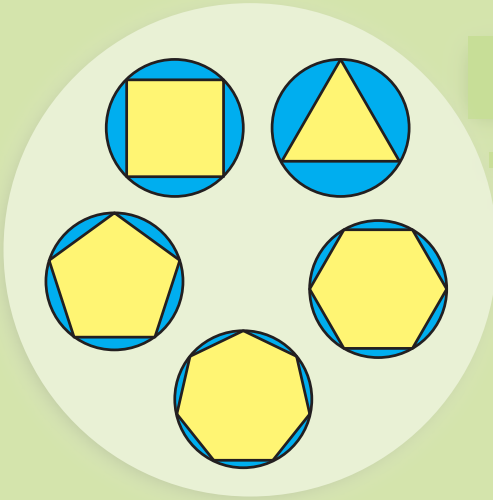
$$\widehat{BC} = 90^\circ$$

$$\widehat{BF} = 110^\circ$$

$$\widehat{EF} = 110^\circ$$

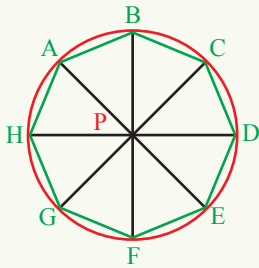
$$\widehat{ABC} = ? , \quad \widehat{1} = ? , \quad \widehat{2} = ? , \quad \widehat{D} = ?$$

دایرهٔ محیطی



به شکل مقابل توجه کنید.
کدام اشکال هندسی دیده می‌شوند،
نام ببرید.

تعریف



دایره‌ی بی که از رأس‌های یک مضلع بگذرد به نام دایرهٔ محیطی مضلع یاد می‌گردد و مضلع را مضلع مرسوم به دایره می‌نامند مانند شکل مقابل.

دایرهٔ محیطی مثلث: دایره‌ی بی که از تمام رأس‌های یک مثلث بگذرد (خارجاً به رأس‌های مثلث مماس باشد) دایرهٔ محیطی مثلث نامیده می‌شود.

فعالیت

- مثلث $\triangle ABC$ را رسم نمایید.
- ناصف‌های عمودی اضلاع AB ، AC و BC را ترسیم نمایید.
- ناصف‌های عمودی فوق در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟ نقطهٔ تقاطع آنها را O بنامید.
- طول‌های OA ، OB و OC را با هم مقایسه کنید.
- دایره‌ی بی به مرکز O و شعاع OA رسم نمایید. آیا این دایره از نقاط B و C نیز می‌گذرد؟ چرا؟
- دایرهٔ ترسیم شده نسبت به مثلث چه نامیده می‌شود؟

نتیجه فعالیت را می توان چنین بیان نمود:

نقطه تقاطع ناصف های عمودی اضلاع یک مثلث مرکز دایره محیطی این مثلث می باشد.

مثال: مثلث قائم الزاویه ABC را طوری رسم نمایید که طول اضلاع قائم آن به ترتیب 8unit و 6unit باشد. شعاع دایره محیطی این مثلث را به دست آورید.

حل: می دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه، مرکز دایره محیطی آن بالای وتر مثلث قرار دارد. ابتدا طول وتر مثلث قائم الزاویه را دریافت می نمایم. که نقطه وسطی آن مرکز دایره محیطی است.

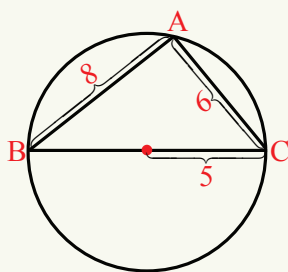
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\overline{BC}^2 = \sqrt{100}$$

$$\overline{BC} = 10\text{unit}$$

$$r = \frac{BC}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5\text{unit}$$



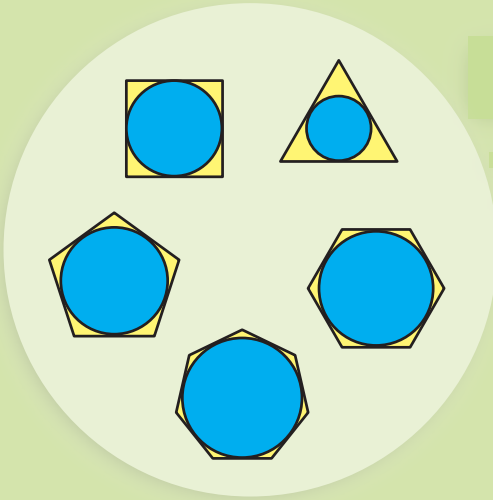
دایره که با رأس های یک مضلع مماس باشد به نام دایره محیطی یاد می گردد و مضلع را مضلع مرسوم به دایره می نامند.

نقطه تقاطع ناصف های عمودی اضلاع یک مثلث مرکز دایره محیطی این مثلث می باشد.

تمرین

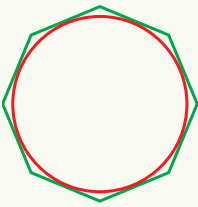
1- مثلثی که اضلاع آن به ترتیب 3, 4 و 5 سانتی متر است، رسم نموده شعاع دایره محیطی آنرا محاسبه کنید.

2- مرکز دایره محیطی مثلثی قائم الزاویه متساوی الاضلاع و متساوی الساقین در کجا واقع است؟ در شکل نشان دهید.



- اشکال هندسی را که در شکل مقابل مشاهده می کنید نام ببرید.
- چه رابطه بین شکل ها می بینید؟

تعریف



دایره‌یی که محیط آن به اضلاع مضلع مماس باشد دایره محاطی گفته می شود مانند شکل مقابل که دایره توسط مضلع احاطه شده است.

دایره محاطی مثلث: دایره‌یی که محیط آن به تمام اضلاع یک مثلث مماس باشد به نام دایره محاطی مثلث یاد می گردد.

فعالیت

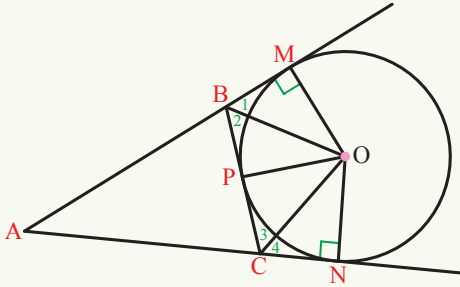
- مثلث کیفی \hat{ABC} را رسم نمایید.
- ناصف الزاویه های \hat{A} ، \hat{B} و \hat{C} را رسم و نقطه تقاطع را به (O) نشان دهید.
- از نقطه O بالای اضلاع مثلث \hat{ABC} عمودهای \overline{OM} ، \overline{ON} و \overline{OP} را رسم کنید.
- طول عمودهای \overline{OM} ، \overline{ON} و \overline{OP} را باهم مقایسه کنید.
- آیا دایره‌یی که به مرکز O و شعاع \overline{ON} رسم شود از نقاط M و P می گذرد؟ چرا؟
- دایره ترسیم شده چه نامیده می شود؟

نتیجه فعالیت را میتوان چنین بیان کرد:

- نقطه تقاطع ناصف الزوایای داخلی هر مثلث مرکز دایره محاطی است.

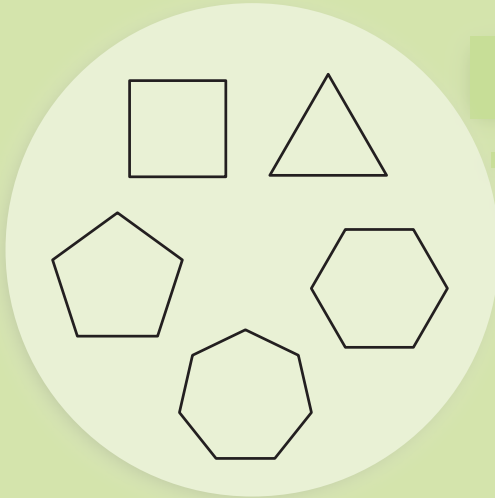
دایره خارجی محاطی مثلث

دایره‌یی که به یک ضلع مثلث و دو ضلع امتداد یافته مثلث مماس باشد دایره خارجی محاطی مثلث گفته می‌شود.



تمرین

1- در کدام نوع مثلث‌ها مرکز دایره محیطی و محاطی باهم دیگر منطبق‌اند رسم کنید؟



دقت کنید:

- در شکل چند نوع مضلع را می

بینید؟

- به نظر شما این مضلعات را چگونه

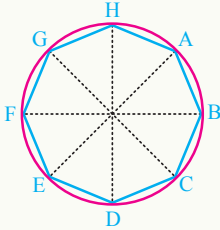
رسم کرده اند؟

فعالیت

● دایره $C(O, r)$ را رسم نموده در مرکز آن 8 زاویه مرکزی مساوی را رسم کنید.

● اگر n تعداد اضلاع یک مضلع و θ زاویه مرکزی مقابل

اضلاع مضلع باشد آیا رابطه $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ حقیقت دارد؟



● نقاط تقاطع اضلاع زوایا با محیط دایره را به هم وصل نمایید.

● آیا اضلاع مضلع تشکیل شده باهم مساوی اند. چرا؟

● مضلع تشکیل شده چه نوع مضلع است؟ هر زاویه مرکزی

مقابل اضلاع این مضلع چند درجه است؟

از فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می آید:

وسعت زاویه مرکزی مقابل هر ضلع یک n ضلعی منظم مساوی به $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ است.

فعالیت

● در دایره $C(O, r)$ یک شش ضلعی منظم محاط شده است.

● مرکز دایره را به رأس های شش ضلعی وصل کنید؟ چند مثلث تشکیل می شود؟

● اندازه هر یک از زوایای مرکزی مقابل اضلاع این شش ضلعی چند درجه است؟

● مثلث های تشکیل شده چه نوع مثلث ها اند؟

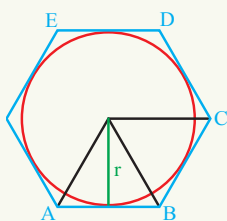
نتیجه فعالیت فوق را می توان به صورت زیر بیان کرد:
طول ضلع هر شش ضلعی منظم مساوی به شعاع دایره محیطی آن است.
مثال: دایره که شعاع آن 2 cm است چطور می توانیم آنرا به یک شش ضلعی منظم محاط نماییم؟

حل: می دانیم که اندازه هر ضلع شش ضلعی منظم مساوی به شعاع دایره محیطی آن است.

پس دهانه پرکار را به اندازه شعاع دایره یعنی 2 cm باز نموده به صورت پیوست روی محیط دایره قوس های مساوی جدا می نماییم. از وصل نمودن نقاط مشخص شده یک شش ضلعی منظم به دست می آید.

مساحت مضلع منظم از جنس محیط و شعاع دایره محاطی

هر گاه مساحت مضلع منظم را به A ، محیط آنرا به P و شعاع دایره محاطی یک n ضلعی را به r نشان دهیم؛ پس مساحت مضلع عبارت از $A = \frac{1}{2} P \cdot r$ است. برای ثبوت به صورت زیر عمل می نماییم:



$$A = \frac{1}{2} AB \cdot r \cdot n$$

$$P = AB \cdot n \quad \text{محیط مضلع}$$

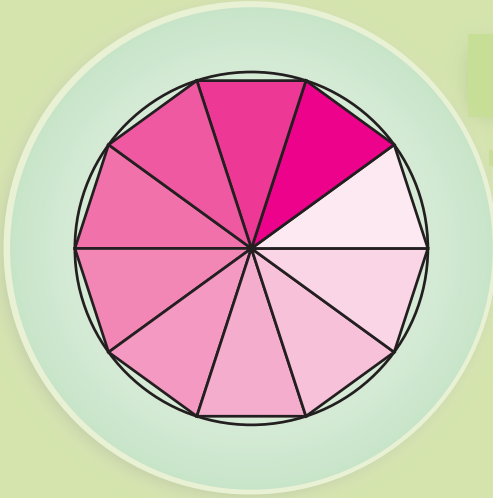
$$A = \frac{1}{2} P \cdot r$$

در نتیجه:

تمرین

1- در دایره به شعاع 3cm یک مثلث متساوی الاضلاع رسم نمایید که محاط به دایره باشد.

محیط و مساحت دایره



در شکل داده شده، روابط بین مجموع مساحت مثلث ها با مجموع مساحت دایره و مجموع طول اضلاع کوچک مثلث ها را با طول محیط دایره مقایسه کنید؟

در دایره $C(O, r)$ اگر قطر به حرف d و محیط دایره به حرف C نمایش داده شود بین این دو عنصر دایره ارتباط زیر موجود است.

$$\frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}} = \frac{C}{d} = \pi = \text{Constant}$$

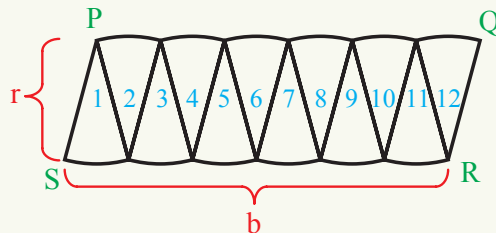
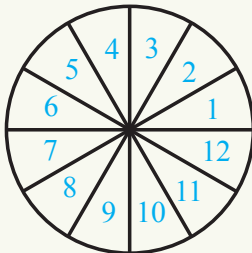
$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = \pi d \dots (I) \quad [\pi \approx 3.14159 \dots]$$

می دانیم که $r = \frac{d}{2}$ یا $d = 2r$ است، اگر این قیمت را در رابطه (I) وضع نماییم محیط دایره از رابطه زیر به دست می آید:

$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi r$$

برای محاسبه مساحت دایره به ریاضیات عالی ضرورت داریم. بدین منظور در اینجا از روش مشاهده برای محاسبه مساحت دایره استفاده می کنیم. برای این کار دایره را توسط اقطار به 12 حصه مساوی تقسیم می نماییم و هر قسمت را از 1 الی 12 شماره زده، قطع می نماییم آن ها را پهلو به پهلو مطابق شکل زیر ترتیب می نماییم، به وضاحت دیده می شود که یک شکل مشابه متوازی الاضلاع را به وجود می آورد.



می دانیم که قاعده b نصف محیط دایره است. چرا؟ یعنی: $\frac{1}{2}C =$ محیط دایره $\times \frac{1}{2} =$ قاعده
می دانیم که مساحت متوازی الاضلاع از رابطه زیر به دست می آید.

ارتفاع \times قاعده = مساحت متوازی الاضلاع

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = b \cdot r = \frac{1}{2} C \cdot r$$

چون $C = 2\pi r$ (محیط دایره) می باشد، پس داریم که:

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

از طرف دیگر میدانیم که مساحت متوازی الاضلاع و دایره تقریباً باهم مساوی اند بنابراین میتوانیم

بنویسیم که: $A = \pi r^2$ (مساحت دایره)

در نتیجه گفته می توانیم که مساحت دایره را از رابطه $A = \pi r^2$ و محیط آن از رابطه

$$C = 2\pi r$$

مثال 1: شعاع یک دایره 14 cm است مساحت دایره را محاسبه نمایید.

حل: می دانیم که مساحت دایره $A = \pi r^2$ می باشد بناءً داریم که:

$$A = \pi r^2$$

$$A = (3.14159) \cdot (14\text{cm})^2$$

$$A = (3.14159) \cdot 196\text{cm}^2 \Rightarrow A = 615.75\text{cm}^2$$

مثال 2: قطر یک دایره 70 cm است شعاع و مساحت دایره را محاسبه نمایید.

حل: با استفاده از رابطه مساحت دایره داریم که:

$$r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4\text{cm}^2$$

مثال 3: اگر محیط یک دایره $14\pi\text{cm}$ باشد شعاع و مساحت دایره را دریابید.

حل: چون محیط دایره داده شده، جهت یافتن مساحت دایره اول باید شعاع دایره را

محاسبه نماییم.

$$C = 14\pi\text{cm}$$

$$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159) \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow A \cong 153.93\text{cm}^2$$

- مساحت یک دایره به شعاع r را می توانیم از رابطه $A = \pi r^2$ به دست آوریم.

- محیط یک دایره به شعاع r را می توانیم از رابطه $C = 2\pi r$ به دست آوریم.

تمرین

- 1- اگر محیط دایره 41 cm باشد شعاع دایره را به دست آرید.
- 2- محیط دایره را به دست آرید که شعاع آن یک واحد طول باشد.
- 3- مساحت دایره را به دست آرید که شعاع آن یک واحد طول باشد.

- اگر از یک نقطه خارجی بالای یک دایره دو مماس رسم گردد طول این مماس ها باهم مساوی است.
- اگر $d^2 - r^2 > 0$ باشد نقطه خارج دایره، اگر $d^2 - r^2 = 0$ باشد نقطه بالای محیط دایره و اگر $d^2 - r^2 < 0$ باشد نقطه داخل دایره واقع است.

زاویه داخلی دایره:

- هر زاویه‌یی که از تقاطع دو قاطع در داخل دایره تشکیل شده باشد زاویه داخلی دایره نامیده می‌شود.
- وسعت هر زاویه داخلی دایره مساوی به نصف حاصل جمع قوس های مقابل این زاویه و امتداد یافته اضلاع این زاویه است، اگر α یک زاویه داخلی دایره باشد؛

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{a} + \widehat{b}}{2} \text{ پس:}$$

زاویه خارجی دایره:

- زاویه‌ی که از اثر تقاطع دو مماس، دو قاطع و یک مماس و یک قاطع در خارج دایره تشکیل شده باشد زاویه خارجی دایره نامیده می‌شود.
- وسعت هر زاویه خارجی مساوی به نصف تفاضل قوس های مقابل آن است، اگر α

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{a} - \widehat{b}}{2} \text{ پس:}$$

مضلع:

- شکلی که از تقاطع چند قطعه خط تشکیل شده باشد و هیچ دو قطعه خط به امتداد یک خط مستقیم نباشد و هر رأس آن فقط و فقط نقطه تقاطع دو قطعه خط باشد مضلع نامیده می‌شود.

- مضع که اضلاع و زوایای آن با هم مساوی باشد مضع منظم نامیده می شود.
- **دایره محیطی مضع:** دایره‌یی که به رأس های مضع مماس باشد دایره محیطی نامیده می شود.
- **دایره محاطی مضع:** دایره‌یی که به اضلاع مضع مماس باشد دایره محاطی مضع گفته می شود.
- **دایره خارجی محاطی مثلث:** دایره‌یی که به یک ضلع مثلث و دو ضلع امتداد یافته مثلث مماس باشد دایره‌یی خارجی محاطی مثلث نامیده می شود.
- مجموعهٔ زوایای مقابل یک چهار ضلعی مرسوم به دایره 180° است.
- محیط دایره از رابطه $C = 2\pi r$ به دست می آید.
- مساحت دایره از رابطه $A = \pi r^2$ به دست می آید.

تمرینات فصل دوم

• در سؤالهای زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است دور جواب صحیح حلقه کنید.

1- اگر یک نقطه P به روی محیط دایره واقع باشد طاقث نقطه مذکور نظر به دایره عبارت است از:

1 (a) $2(b)$

0 (c) هر سه جواب درست است. (d)

2- اگر نقطه P خارج یک دایره واقع شود طاقث نقطه مذکور نظر به دایره در صورتی که شعاع دایره r و فاصله نقطه مذکور از مرکز دایره d باشد عبارت است از:

$d - r > 0$ (a) $d^2 - r^2 > 0$ (b)

$d - r < 0$ (c) $r^2 - d^2 > 0$ (d)

3- یک نقطه به اندازه 13cm از مرکز دایره $C(O, r)$ فاصله دارد اگر قطر دایره 10cm باشد طول قسمت خارجی قاطع از نقطه مذکور عبارت است از:

13 cm (a) 10 cm (b)

12 cm (c) 8 cm (d)

4- اگر طول مماس از نقطه P به دایره (O, r) مساوی به 12cm و قطر دایره 10cm باشد فاصله P از O عبارت است از:

13 cm (a) 12 cm (b)

10 cm (c) 5 cm (d)

5- اگر وتر \overline{AB} دایره $C(O, r)$ را تا نقطه P امتداد دهیم طوری که $\overline{AP} = 8\text{cm}$ و $\overline{BP} = 2\text{cm}$ باشد طول مماس \overline{PT} عبارت است از:

4 cm (a) 8 cm (b)

2 cm (c) هر سه جواب غلط است. (d)

• در سؤالات زیر جاهای خالی را با کلمات مناسب خانه پری نمایید.

- 1- $d^2 - r^2$ عبارت از نقطه نظر به یک دایره است.
- 2- اگر خط \overline{PT} به دایره $C(O, r)$ مماس باشد طاقث نقطه P نظر به دایره $C(O, r)$ عبارت از $\overline{PT}^2 = \dots\dots\dots$ است.
- 3- طاقث یک نقطه P نظر به یک دایره است، در صورتی که نقطه بالای محیط دایره واقع باشد.
- 4- طاقث یک نقطه نظر به یک دایره است، در صورتی که نقطه داخل دایره واقع باشد.
- 5- طاقث یک نقطه نظر به یک دایره است، در صورتی که نقطه خارج دایره واقع باشد.
- 6- اگر $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$ باشد نقاط C, B, A و D بالای محیط واقع بوده بناءً نقطه P خارج و یا داخل واقع است.
- 7- اگر B, A و T بالای محیط دایره واقع باشند نقاط B, A و P روی یک مستقیم واقع اند در این صورت $\overline{PT}^2 = \dots\dots\dots$ است در صورتی که P خارج دایره واقع باشد.

• در مقابل جمله‌های صحیح حرف (ص) و در مقابل جمله‌های غلط حرف (غ) را بنویسید.

- 1- () طاقث یک نقطه نظر به یک دایره مساوی به مربع فاصله نقطه از مرکز دایره است.
- 2- () اگر یک نقطه به روی محیط یک دایره واقع باشد طاقث آن نظر به دایره صفر است.
- 3- () اگر یک نقطه داخل یک دایره واقع باشد طاقث نقطه نظر به دایره مذکور منفی است.

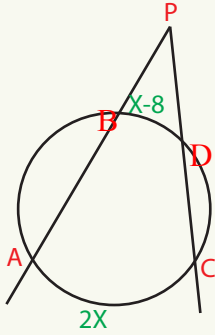
4- () اگر یک نقطه خارج یک دایره واقع باشد طاقته نقطه مذکور نظر به دایره متذکره مثبت است.

5- () طاقته یک نقطه نظر به هر دایره مثبت است.

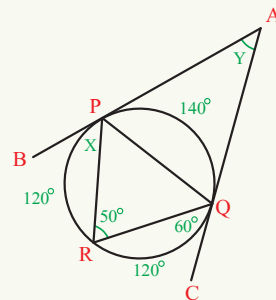
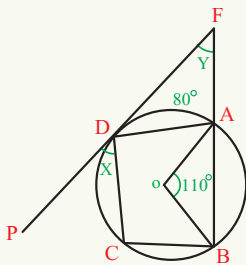
6- () طاقته یک نقطه نظر به یک دایره $d^2 - r^2$ است. در صورتی که d فاصله نقطه از مرکز دایره و r شعاع دایره باشد.

• سوالات زیر را حل نمایید.

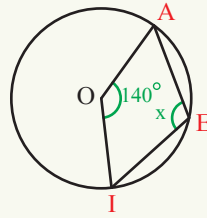
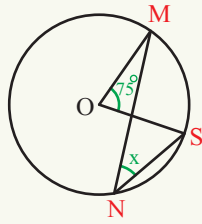
1- در شکل زیر اگر $\hat{P} = 43^\circ$ و قوس‌هایی مقابل آن به ترتیب $(2x)^\circ$ و $(x-8)^\circ$ باشد اندازه زاویه \hat{APC} را دریابید.



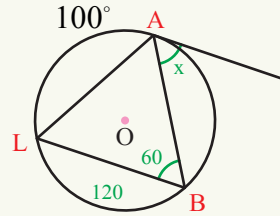
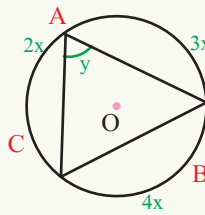
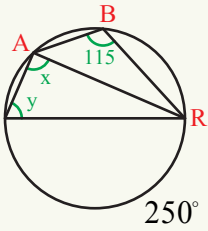
2- اندازه‌هایی \hat{x} و \hat{y} را در اشکال زیر پیدا کنید.



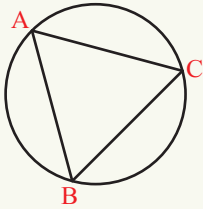
3- اندازه \hat{x} را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.



4- اندازه زاویه‌های \hat{x} و \hat{y} را در اشکال زیر دریابید.



5- با استفاده از تعریف دایره محاطی نشان دهید که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.





فصل سوم

هندسة تحليلی

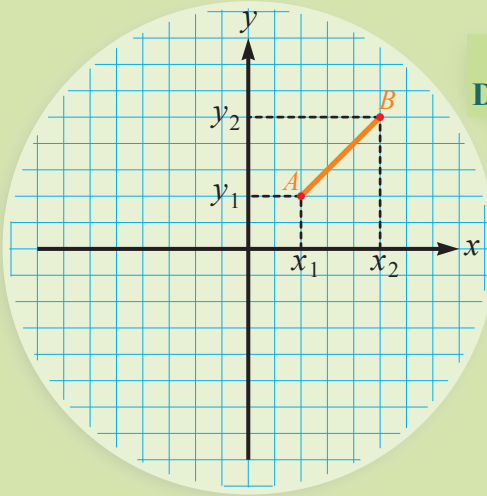
هندسه تحلیلی Analytic Geometry

هندسه تحلیلی عبارت از علمی رابطه بین الجبر و هندسه است که روابط بین معادلات الجبری و اشکال هندسی را مورد بحث قرار می دهد، ریاضیدان فرانسوی دیکارت برای اولین بار، رابطه بین اشکال معین هندسی و معادلات الجبری را به دست آورد. و اظهار داشت که: بعضی از معادلات الجبری یک شکل معین هندسی دارد. از این که اساس علم هندسه را نقطه و اساس معادلات الجبری را عدد تشکیل می دهد بدین منظور لازم است که ابتدا رابطه بین نقطه و عدد را مورد مطالعه قرار دهیم. دیکارت برای رابطه بین عدد و نقطه یک سیستم یا دستگاه قایم محورات را معرفی نمود که تا فعلاً به نام وی یاد می گردد.



فاصله بین دو نقطه

Distance between two Points



هر دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ در مستوی مختصات قائم یک قطعه خط مانند AB را تعیین می کند. به نظر شما چگونه می توان فاصله بین دو نقطه A و B را محاسبه کرد؟

فعالیت

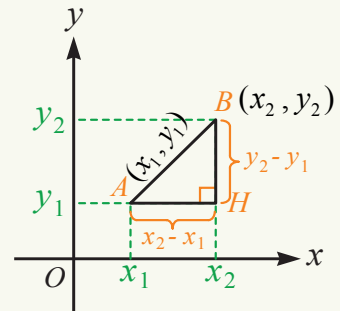
- موقعیت نقاط $A(3,5)$ و $B(5,4)$ را در سیستم کمیات وضعیه نشان دهید.
- قطعه خط \overline{AB} را رسم کنید.
- فاصله بین نقاط A و B را محاسبه نمایید.

از فعالیت فوق می توانیم به صورت عمومی فاصله بین دو نقطه کیفی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را طور زیر به دست آریم:
در شکل زیر مثلث AHB یک مثلث قائم الزاویه است. با استفاده از قضیه فیثاغورث می توانیم فاصله بین دو نقطه A و B را طور زیر دریافت نماییم.

نظر به قضیه فیثاغورث $\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AH} = x_2 - x_1 \\ \overline{BH} = y_2 - y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



مثال 1: فاصله بین نقاط $A(1,7)$ و $B(5,4)$ را دریابید.

حل: با استفاده از فرمول فاصله بین دو نقطه داریم که:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ unit}$$

مثال 2: فاصله نقطه $A(3,4)$ را از مبدأ کمیات وضعیه محاسبه نمایید.

حل: چون مختصات مبدأ $O(0,0)$ بوده بناءً فرمول فاصله بین دو نقطه شکل

$$\overline{OA} = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2} \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} \Rightarrow \overline{OA} = 5 \text{ unit}$$

فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ عبارت است از:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصله بین این دو نقطه اختیاری را میتوان به d نیز نمایش داد؛ طور زیر:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصله هر نقطه اختیاری $P(x, y)$ از مبدأ کمیات وضعیه عبارت است از:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تمرین

1- فاصله بین نقاط $A(0,3)$ و $B(2,0)$ را دریابید؟

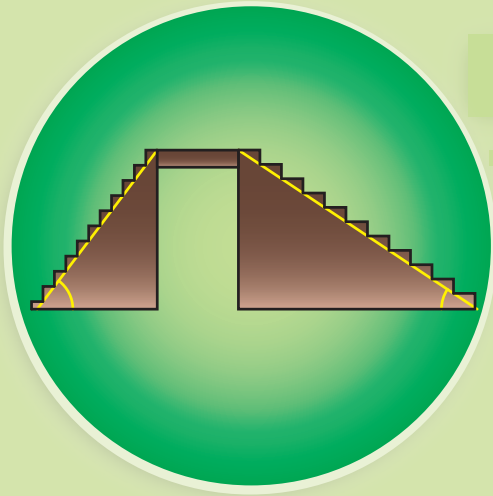
2- فاصله بین نقاط $P(1,3)$ و $Q(3,7)$ را دریابید؟

3- اگر $A(-1,4)$ ، $B(-3,-7)$ و $C(1, 9)$ مختصات رأس های یک مثلث باشد،

محیط مثلث را محاسبه نمایید؟

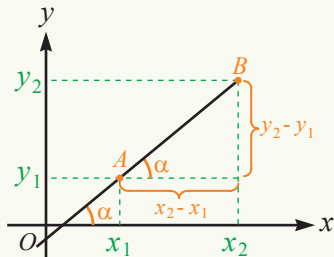
4- مساحت مثلثی را به دست آرید که رأس های آن از نقاط زیر $B(6,2)$ ، $A(2,0)$

و $C(1,2)$ بگذرد؟



به شکل مقابل نگاه کنید بالای کدام یکی از زینه ها به آسانی بالا شده می توانید. چرا؟ علت آنرا بیان نمایید.

اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه کیفی خط مستقیم \overline{AB} باشد نسبت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ را میل خط مستقیم \overline{AB} گویند و طور زیر می نوشته می شود:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 1: میل خط مستقیمی را دریافت کنید که از

نقاط $A(3,5)$ ، $B(4,6)$ بگذرد.

حل: می دانیم که میل یک خط مستقیم از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می آید لذا داریم

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 5}{4 - 3} = 1 \quad \text{که:}$$

مثال 2: خط مستقیمی که از نقاط $A(2,5)$ و $B(4,k)$ می گذرد در آن قیمت k را

طوری تعیین نمایید. که میل خط مستقیم \overline{AB} مساوی به 3 باشد.

حل: جهت محاسبه قیمت k از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ طوری زیر استفاده می کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$3 = \frac{k - 5}{4 - 2}$$

$$k - 5 = 6$$

$$k = 11$$

مثال 3: میل خط مستقیمی را به دست آرید که از نقطه $P(2,3)$ و مبدأ کمیات وضعیه بگذرد.

حل: چون خط مستقیم از مبدأ کمیات وضعیه می گذرد و مختصات مبدأ $O(0,0)$

است میل آنرا طوری زیر به دست می آریم:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{0 - 2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5$$

تمرین

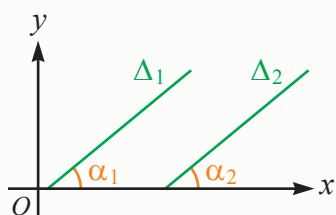
- 1- میل خط مستقیمی را به دست آرید که از نقاط $A(1,1)$ و $B(-1,-1)$ بگذرد؟
- 2- در خط مستقیمی که از نقاط $A(-2, 2\sqrt{3})$ و $B(1,a)$ می گذرد قیمت a را طوری تعیین نمایید که میل خط مستقیم $\sqrt{3}$ باشد؟

میل خطوط مستقیم موازی



در شکل داده شده زینه را در نظر گرفته بگویید که چه رابطه بین دو بازوی زینه موجود است.

فعالیت



- در کمیات وضعیه مختصات قائم، دو خط مستقیم Δ_1 و Δ_2 را باهم طوری موازی رسم کنید که با جهت مثبت محور X زوایای حاده را بسازند.
- میل خطوط Δ_1 و Δ_2 را محاسبه کرده و باهم مقایسه کنید. ببینید آنها با هم چه رابطه دارند؟
- اگر خط مستقیم Δ_1 با جهت مثبت محور X زاویه α_1 و خط مستقیم Δ_2 با جهت مثبت محور X زاویه α_2 را بسازد، آنگاه α_1 و α_2 با یکدیگر چه رابطه دارند؟

به صورت عمومی نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می نمایم:

خطوط مستقیم موازی دارای میل های مساوی می باشند.

اگر دو خط مستقیم میل های مساوی داشته باشند در نتیجه زوایای که با جهت مثبت محور X می سازند نیز با هم مساوی اند.

مثال: اگر خط مستقیم Δ_1 از نقاط $A(2,5)$ و $B(-6,-11)$ و خط مستقیم Δ_2 از نقاط $C(-4,-6)$ و $D(3,8)$ بگذرد خطوط Δ_1 و Δ_2 بین هم دیگر چه رابطه دارند.

حل: میل های خطوط مستقیم Δ_1 و Δ_2 را محاسبه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{AB} = m_{\Delta_1} &= \frac{-11 - 5}{-6 - 2} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{CD} = m_{\Delta_2} &= \frac{8 - (-6)}{3 - (-4)} = \frac{8 + 6}{3 + 4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

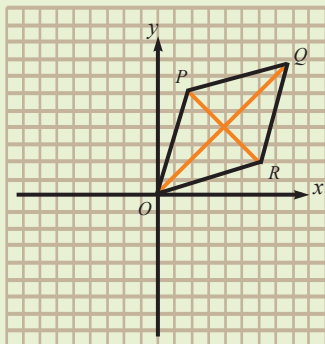
چون میل های خطوط مستقیم Δ_1 و Δ_2 باهم مساوی اند بناءً این خطوط با هم موازی اند.

تمرین

اگر نقاط $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ و $D(0,-5)$ رأس های یک چهار ضلعی باشند.

الف: اضلاع مقابل چهار ضلعی باهم چه ارتباط دارد؟

ب: میل قطرهای آنرا دریابید.

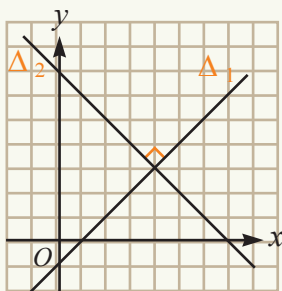


چهار ضلعی $OPQR$ یک لوزی است. آیا می توانید خصوصیات لوزی را با کمک مختصات رأس آن بیان کنید.

فعالیت

- نقاط $O(0,0)$, $B(1,3)$, $C(4,4)$ و $D(3,1)$ را در مختصات کمیات وضعیه قایم نشان دهید.
 - با وصل نمودن نقاط O, C, B, D شکل $OBCD$ را به دست آرید.
 - طول اضلاع \overline{OB} , \overline{BC} , \overline{CD} و \overline{DO} را محاسبه کنید.
 - نشان دهید که قطرهای OC و BD با هم دیگر عمود اند.
- از نتیجه فعالیت فوق تعریف زیر به دست می آید:

تعریف



دو خط مستقیم Δ_1 و Δ_2 با میل های m_1 و m_2 وقتی بر یکدیگر عموداند که رابطه زیر بین آنها برقرار باشد.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

مثال 1: خط مستقیمی که از نقاط $A(7,5)$ و $B(1,1)$ و خط مستقیمی که از نقاط $C(0,5)$ و $D(2,2)$ می گذرد با هم چه رابطه دارند؟

حل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{1 - 7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

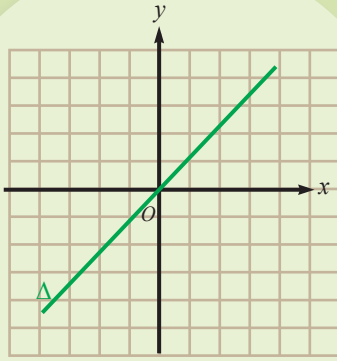
$$m_{\overline{CD}} = \frac{2 - 5}{2 - 0} = \frac{-3}{2}$$

چون $m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$ است، بناءً خطوط \overline{AB} و \overline{CD} با هم عمود اند.

تمرین

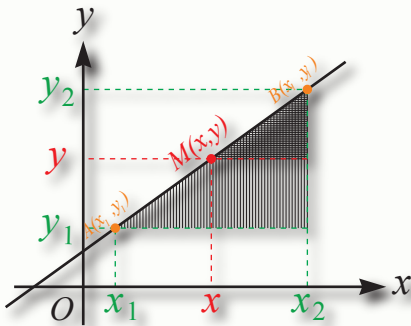
- 1- نقاط $A(6,1)$, $B(8,3)$ و $C(6,5)$ سه رأس یک مثلث اند. نشان دهید که مثلث قائم الزاویه است.
- 2- وضعیت قطعه خطی که از نقاط $A(7,5)$, $B(1,1)$ و قطعه خطی که از نقاط $C(0,5)$, $D(2,2)$ می گذرد با هم دیگر تعیین کنید.
- 3- وضعیت قطعه خطی که از نقاط $A(2,4)$ و $B(7,5)$ و قطعه خطی که از نقاط $C(1,-4)$ و $D(-3,-5)$ می گذرد با هم دیگر تعیین کنید.

معادله خطی مستقیمی که دو نقطه آن معلوم باشد



چند نقطه را روی خط شکل مقابل انتخاب کنید.
چه رابطه‌ی بین فاصله و ترتیب نقاط روی خط می‌بینید؟

فعالیت



- دو نقطه کیفی $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را در سیستم کمیات وضعیه مشخص کنید.
- اگر نقاط A و B باهم وصل شوند چه به دست می‌آید.
- یک نقطه کیفی دیگری مانند $M(x, y)$ را بالای خط مستقیم \overline{AB} در نظر گرفته نشانی کنید؟
- از نقاط A, M, B بالای محورهای x و y عمودها رسم و نام گذاری کنید؟

از انجام فعالیت فوق چنین نتیجه گیری می‌نماییم:

معادله خط مستقیمی که از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد و نقطه $M(x, y)$ نیز بالای این خط مستقیم قرار داشته باشد دارای شکل زیر است:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

مثال: معادله خط مستقیمی را بنویسید که از دو نقطه $A(3,4)$ و $B(2,-1)$ بگذرد.

حل: با استفاده از معادله خط مستقیمی که دو نقطه آن معلوم باشد می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{که:}$$

$$\frac{y - 4}{x - 3} = \frac{-1 - 4}{2 - 3} \Rightarrow \frac{y - 4}{x - 3} = \frac{-5}{-1} \Rightarrow \frac{y - 4}{x - 3} = 5$$

$$y - 4 = 5(x - 3)$$

$$y = 5x - 15 + 4 = 5x - 11$$

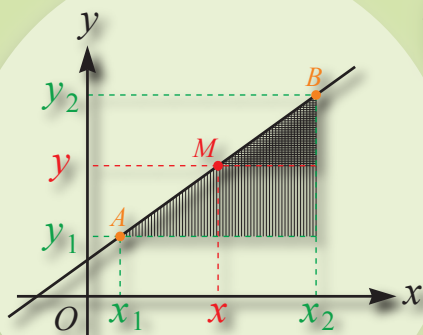
$$y = 5x - 11$$

تمرین

1- معادله خط مستقیمی را دریابید که از نقاط $A(2,-1)$ و $B(3,4)$ بگذرد؟

2- معادله میانه \overline{AM} مثلث را دریابید که رأس‌های آن $A(1,3)$ ، $B(-1,4)$ و $C(5,6)$ باشد.

معادله خطی مستقیمی که میل و یک نقطه آن معلوم باشد



در شکل مقابل میل \overline{AB} با میل \overline{MA} چه رابطه دارند؟
 آیا میل هر قطعه خط مستقیم دیگری که روی خط \overline{AB} و یا موازی با خط \overline{AB} انتخاب کنیم با میل خط \overline{AB} برابر است یا خیر اگر است چرا؟

می دانیم معادله یک خط مستقیم که دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ آن معلوم باشد

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{عبارت است از:}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{یا}$$

چون $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ میل خط مستقیم را نشان می دهد بناءً معادله فوق شکل زیر را به خود

اختیار می کند.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادله اخیر معادله خط مستقیمی است که یک نقطه آن $A(x_1, y_1)$ و میل آن یعنی m معلوم است.

مثال 1: معادله مستقیمی را بنویسید که از نقطه $(2, 3)$ می گذرد و میل آن $\frac{1}{2}$ باشد.

حل: چون میل و یک نقطه خط مستقیم داده شده پس از معادله $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{می توانیم بنویسیم:}$$

$$2(y - 3) = (x - 2)$$

$$2y - 6 = x - 2$$

$$2y = x + 6 - x$$

$$2y = x + 4$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

شکل عمومی معادله خط مستقیم $y = mx + b$ می باشد که در آن m میل خط مستقیم و b ترتیب نقطه تقاطع با محور y است.

مثال 2: معادله خطوط مستقیم $3x + 4y = 5$ و $4x - 3y = -1$ باهم چه رابطه دارند؟

حل: با استفاده از ضرایب معادلات دو خط مستقیم داریم که:

$$a_1 = 3$$

$$b_1 = 4$$

$$c_1 = -5$$

$$a_2 = 4$$

$$b_2 = -3$$

$$c_2 = 1$$

1- چون $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ یعنی $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{-3}$ است، بناً خطوط داده شده متقاطع اند.

2- چون $\frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2} = -1$ یعنی $\frac{3}{4} \times \frac{4}{-3} = -1$ است، پس این دو خط مستقیم در نقطه تقاطع باهم عمود اند.

تمرین

- 1- معادله خط مستقیمی را دریابید که میل آن 4 و محور y را در نقطه -3 قطع کند.
- 2- معادله خط مستقیمی را به دست آرید که از نقطه $P(5, -4)$ گذشته و میل آن -2 باشد.
- 3- حالات خطوط $4x + 3y - 1 = 0$ و $8x + 6y + 5 = 0$ را معلوم کنید.

• فاصله بین دو نقطه A و B از رابطه $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ به دست می آید.

• میل هر خط مستقیم از رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ به دست می آید.

• مستقیم های موازی دارای میل های مساوی اند.

• میل هر مستقیم موازی با محور X صفر و میل هر مستقیم عمود بر محور X تعریف نشده.

• دو خط مستقیم وقتی باهم عمود اند که حاصل ضرب میل های آنها مساوی به (-1) شود.

• سه نقطه اختیاری زمانی بالای یک خط مستقیم قرار می گیرند که میل هر قطعه خط

آنها با هم مساوی باشند. یا $AB + BC = AC$

تمرین فصل سوم

- در سؤالات زیر به هر سؤال چهار جواب داده شده است جواب صحیح آن را انتخاب کنید.
- 1- حاصل ضرب میل های دو خط عمود بالای همدیگر:
 (a) (1) است. (b) صفر است. (c) ∞ است. (d) منفی یک است.
- 2- معادله خط مستقیم که میل و نقطه تقاطع آن با محور y معلوم باشد عبارت است از:
 (a) $y = mx$ (b) $y = b$ (c) $y = mx + b$ (d) $y - y_1 = m(x - x_1)$
- 3- معادله خط مستقیم که دو نقطه آن معلوم باشد عبارت است از:
 (a) $y = mx + b$ (b) $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (c) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (d) $y = mx$
- 4- فاصله بین دو نقطه A و B از کدام فرمول زیر به دست می آید:
 (a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ (b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$
 (c) $AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$ (d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 5- فاصله بین یک نقطه و مبدأ کمیات وضعیه عبارت است از:
 (a) $d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (b) $d = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$
 (c) $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ (d) $d = \sqrt{x^2 - y^2}$
- 6- میل یک خط مستقیم عبارت است از:
 (a) $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ (b) $m = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ (c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (d) $m = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$
- 7- دو مستقیم وقتی با هم موازی اند که:
 (a) میل های آنها با هم مساوی باشد.
 (b) میل های آنها مساوی نباشند.
 (c) حاصل ضرب میل های آنها منفی یک باشد.
 (d) همه درست است.

• جا های خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

- 1- در سیستم کمیات وضعیه محور X را محور و محور Y را محور گویند.
- 2- در ناحیه دوم نقاطی قرار دارند که X آنها و Y آنها
- 3- در ناحیه سوم نقاطی قرار دارند که هم X و هم Y آنها است.
- 4- دو مستقیم موازی با جهت مثبت محور X زوایای می سازد.
- 5- میل هر مستقیم موازی با محور X است.
- 6- سه نقطه زمانی بر یک خط مستقیم قرار دارند که میل هر قطعه خط آنها با هم باشد.
- 7- اگر میل دو خط با یکدیگر مساوی نباشد آن دو خط اند.

• کدام یک از جملات زیر صحیح و کدام یک از آن ها غلط اند. در مقابل صحیح حرف (ص) و در مقابل غلط حرف (غ) بگذارید.

- 1- () مستقیم های موازی دارای میل های مساوی اند.
- 2- () دو مستقیم وقتی باهم عمود اند که حاصل ضرب میل های شان مساوی به $(+1)$ باشد.
- 3- () شکل عمومی معادله خط مستقیم $y = mx$ است.

• سوالات زیر را حل نمایید.

1- نقطه‌های که کمیات وضعیه آن ذیلاً داده شده در مستوی کمیات وضعیه تعیین کنید.

1: (0,1) 2: (2,3) 3: (0,-4) 4: (5,0)

2- فاصله بین هر جوهره از نقطه‌های را که کمیات وضعیه آنها ذیلاً داده شده است معلوم کنید؟

1: (0,9), (-5,4) 2: (4,1), (3,-2) 3: (-7,4), (1,-11)

3- نشان دهید که نقطه‌های داده شده زیر رأس‌های یک مثلث قائم‌الزاویه بوده و مساحت آن را نیز به دست آرید؟

(0,9) , (-4,-1) , (3,2)

4- نشان دهید که نقطه‌های داده شده زیر بالای یک خط مستقیم قرار دارند.

1: (0,4) , (3,-2) , (-2,8) 2: (1,2) , (-3,10) , (4,-4)

5- میل و یک نقطه خطوط در زیر داده شده است، معادله‌های آنها را به دست آرید؟

1: (2,3) , $m = -\frac{1}{2}$ 2: (-4,1) , $m = -\frac{2}{3}$ 3: (-1,-4) , $m = -2$

6- اگر رأس‌های یک مستطیل (-3,1) , (-1,3) , (3,-1) و (1,-3) باشد مساحت آنرا دریافت نمایید؟

7- اگر رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع (2,4) , (5,9) , (4,9) و (1,4) باشد طول اقطار آنرا دریابید؟

8- نشان دهید که نقاط (-3,1) , (-9,4) , (12,0) و (6,3) رأس‌های یک متوازی‌الاضلاع است؟

9- اگر رأس‌های یک مثلث (5,0) , (-3,2) و (1,-3) باشند کمیات وضعیه نقطه‌های وسطی اضلاع آن را به دست آرید؟

10- معادلات خطوط مستقیمی را دریابید که از نقطه $P(4,5)$ گذشته و به ترتیب یکی آن با محور x و دیگر آن با محور y موازی باشد.

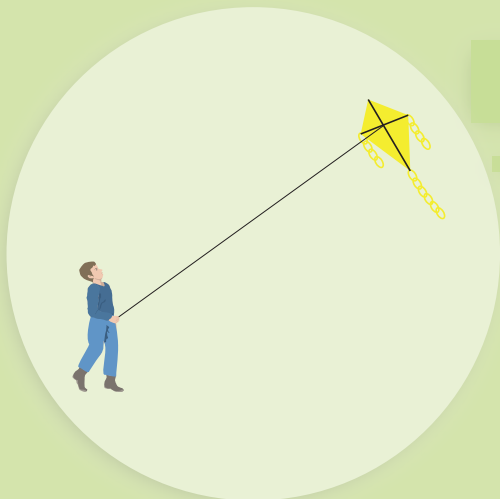


فصل چہارم

مثلثات



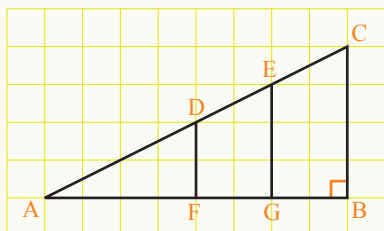




اگر یک کاغذ پران در هوا در حالت پرواز باشد چگونه می‌توانید فاصله آن را از زمین محاسبه کنید؟

فعالیت

- در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ بالای وتر \overline{AC} نقاط D و E را انتخاب کرده‌ایم، از این نقاط به ضلع \overline{CB} در مثلث خطوط موازی ها رسم نموده نقاط تقاطع آنها به ضلع AB را به ترتیب F و G بنامید.



- با استفاده از خط کش اضلاع مثلث را اندازه گرفته و نسبت‌های $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ و $\frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{AB}}$ را محاسبه نموده با هم مقایسه کنید.

- آیا با تغییر محل نقاط D و E نسبت‌های

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \text{ و } \frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{AB}}$$

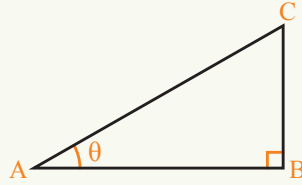
تغییر می‌کند؟

- آیا با تغییر محل نقاط روی \overline{AC} ، در مقدار زاویه \hat{A} تغییری ایجاد می‌گردد؟
- اکنون طول خط \overline{AB} را ثابت نگاه دارید و زاویه \hat{A} را افزایش دهید. فکر کنید تساوی نسبت‌های فوق چگونه اتفاق می‌افتد؟ تحقیق کنید.

تعریف

در هر مثلث قائم الزاویه نسبت ضلع مقابل یک زاویه حاده بر طول وتر همیشه مساوی به یک مقدار ثابت است که به وسعت زاویه حاده بسته گی دارد. این نسبت را $\sin \theta$ (ساین زاویه حاده) می نامیم:

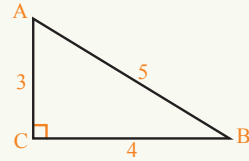
$$\sin \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$



مثال: در شکل زیر مقدار $\sin A$ و $\sin B$ را به دست آورید.
حل:

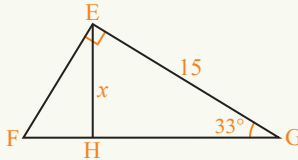
$$\sin \hat{A} = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه } A}{\text{طول وتر}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \hat{A} = 0.8$$

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه } B}{\text{طول ضلع وتر}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \hat{B} = 0.6$$



تمرین

1- اگر $\sin 33^\circ$ مساوی 0.5446 باشد، در شکل زیر قیمت عددی x را دریابید.



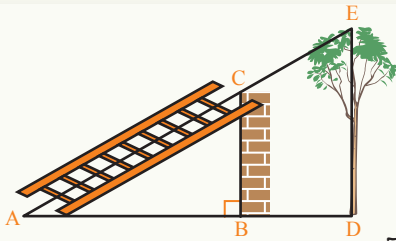
2- زوایای 40° , 65° و 80° را به ترتیب رسم نموده سپس بر روی هر زاویه یک مثلث قائم الزاویه جداگانه رسم نمایید با استفاده از خط کش و اندازه گیری اضلاع $\sin 40^\circ$, $\sin 65^\circ$ و $\sin 80^\circ$ را دریابید و با هم مقایسه کنید.

کوساین یک زاویه حاده



یک درخت ناجو عقب یک دیوار قرار دارد. یک شاگرد می خواهد بداند درخت از دیوار چقدر فاصله دارد. برای دریافت فاصله فقط یک زینه در اختیار دارد، بگویید که او راجع به چه فکر می کند

فعالیت



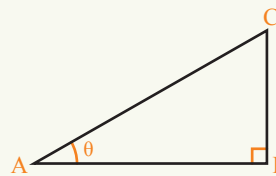
- مثلث های تشکیل شده در شکل مقابل را نام ببرید.
 - \overline{DE} و \overline{BC} با هم چه رابطه دارند؟ چرا؟
 - مثلث های ABC و ADE با هم چه رابطه دارند؟
 - فاصله زینه را الی دیوار و بعد الی درخت به دست آرید.
 - به کمک قضیه تالس مساوات زیر را تکمیل و طول \overline{AE} را به دست آرید.
- $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\dots}{\overline{AE}}$$
- این مقدار به چه چیزی بسته گی دارد؟

از انجام فعالیت فوق تعریف زیر به دست می آید:

تعریف

به صورت عموم در مثلث قائم الزاویه ABC که یک زاویه حاده آن θ است، نسبت طول ضلع مجاور این زاویه بر طول وتر مثلث را به نام $\cos \theta$ (کوساین زاویه θ) یاد می کنند.

$$\cos \theta = \frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه } \theta}{\text{طول وتر}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$



مثال: در مثلث قائم الزاویه AHB اگر زاویه $\hat{A} = 30^\circ$ و زاویه $\hat{B} = 60^\circ$ باشد، نشان دهید که: $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ، $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ است.

حل: با استفاده از قضیه فیثاغورث ارتفاع AH را می توانیم چنین بدست آریم:

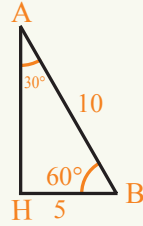
$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$10^2 = AH^2 + 5^2 \Rightarrow AH^2 = 100 - 25 = 75$$

$$AH = \sqrt{75} \Rightarrow AH = 5\sqrt{3}$$

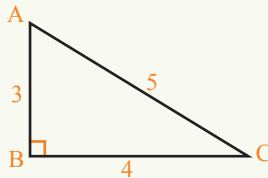
$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} , \quad \cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} , \quad \cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



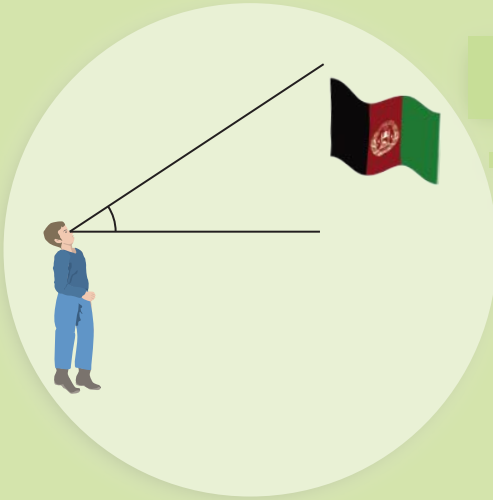
تمرین

- 1- رابطه $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ را برای زاویه های 30° ، 45° و 60° تحقیق کنید.
- 2- در مثلث قائم الزاویه زیر قیمت عددی $\sin A$ و $\cos A$ را دریابید.



- 3- در مثلث قائم الزاویه ABC که طول اضلاع آن 6، 8 و 10 واحد طول است نسبت های مثلثاتی $\sin A$ و $\cos A$ را محاسبه نمایید.

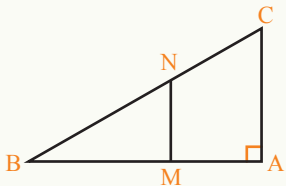
تانجنت یک زاویه حاده



یک شاگرد به مقابل بیرق ایستاد شده، فکر می کند که طول میله بیرق را چگونه دریافت کند؟

فعالیت

در مثلث $\triangle ABC$ که زاویه A در آن قائمه است نسبت های مثلثاتی زاویه B $(\sin \hat{B}, \cos \hat{B})$ را در نظر بگیرید. طوری که قطعه خط MN موازی به AC رسم شده است.



• با در نظر داشت مثلث $\triangle ABC$ ، $\sin B$ و $\cos B$ را بر حسب اضلاع مثلث ABC بنویسید.

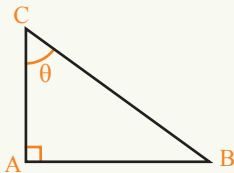
• $\frac{\sin B}{\cos B}$ را بر حسب اضلاع مثلث $\triangle ABC$ بنویسید.

• با استفاده از مثلث $\triangle BMN$ ، $\sin B$ ، $\cos B$ و $\frac{\sin B}{\cos B}$ را بر حسب اضلاع مثلث بنویسید.

• فکر می کنید اگر در مثلث فوق $\frac{\cos B}{\sin B}$ را پیدا کنیم، آیا این نسبت به طول اضلاع ارتباط می گیرد یا تنها به مقدار زاویه بسته گی دارد؟

از انجام فعالیت فوق نتایج زیر به دست می آید:

نتیجه 1: در یک مثلث قائم الزاویه نسبت طول ضلع مقابل یک زاویه حاده بر طول ضلع مجاور آن زاویه مقدار ثابتی است که به نام $\tan \theta$ (تانجانت زاویه حاده) یاد می گردد.

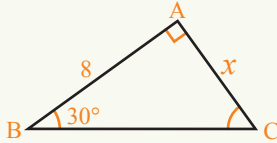


$$\tan \theta = \frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{طول ضلع مجاور زاویه } \theta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

نتیجه 2: تانجانت زاویه حاده (θ) مساوی است با نسبت ساین زاویه حاده بر کوساین همان زاویه.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

نتیجه 3: نسبت $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ مقدار دیگری است که آن را به نام $\cot \theta$ (کو تانجانت زاویه θ) یاد می کنند یا به عبارتی دیگر نسبت طول ضلع مجاور زاویه θ بر طول ضلع مقابل زاویه θ را $\cot \theta$ می گویند این نسبت مانند نسبت های مثلثاتی دیگر تنها به اندازه زاویه ارتباط دارد.

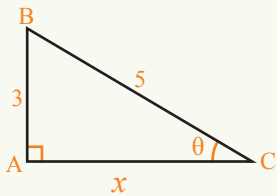


مثال 1: در مثلث مقابل اگر $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ باشد قیمت

$\tan 30^\circ$ را به دست آرید.

حل: با استفاده از تعریف $\tan \theta$ می توانیم بنویسیم که:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \div 8 \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



مثال 2: مثلث قائم الزاویه ABC در زیر ترسیم

گردیده است. در این مثلث نسبت های $\tan \theta$

، $\cos \theta$ و $\cot \theta$ را به دست آورده و رابطه

$\tan \theta$ را با نسبت $\cos \theta$ و $\sin \theta$ مقایسه کنید.

حل: ابتدا با استفاده از قضیه فیثاغورث در مثلث ABC

طول AC را پیدا می کنیم.

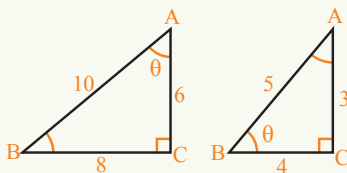
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5} \quad \cos \theta = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan \theta = \frac{3}{4} \quad , \quad \cot \theta = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \quad \tan \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

تمرین



1- از شکل های مقابل $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، $\tan \theta$ و $\cot \theta$

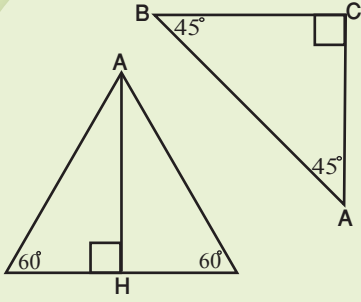
را دریابید.

2- در مثلث ABC که اضلاع آن با هم مساوی است \hat{A} و \hat{B} را دریابید.

3- در یک مثلث قائم الزاویه اگر قاعده آن ثابت نگه داشته شود و زاویه حاده آن

بزرگ شود، در نسبت $\tan \theta$ آن چه تغییری رخ می دهد؟

نسبت‌های مثلثاتی زوایای خاص (90° و 45° ، 60° ، 30°)



مثلث‌های مقابل چه نوع مثلث‌ها بوده، آنها را نام گرفته طول اضلاع آن را مشخص کنید.

فعالیت

- یک مثلث متساوی‌الاضلاع $\triangle ABC$ را رسم نمایید.
- ارتفاع \overline{AH} آن را رسم نمایید، ارتفاع در این نوع مثلث کدام خاصیت‌ها را داراست؟
- با استفاده از قضیه فیثاغورث اندازه ارتفاع مثلث مذکور را دریافت نمایید.
- آیا می‌توانید قیمت‌های عددی نسبت‌های مثلثاتی زوایای 30° و 60° را دریافت کنید؟
- یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ را طوری رسم نمایید که طول ساق‌های آن یک واحد طول باشد.
- هر یک از زاویه‌های حاده چند درجه است؟ چرا؟ اندازه طول وتر آن را محاسبه کنید.
- نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45° را به دست آرید.

برای انجام فعالیت بالا می‌توانیم از جدول زیر استفاده نماییم:

زاویه نسبت‌های مثلثاتی	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده

مثال: در رابطه‌های زیر قیمت‌های عددی X و Y را دریابید:

- 1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$
- 2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$
- 3) $x = \tan 60^\circ - \sin 30^\circ$
- 4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ$
- 5) $x = \tan 45^\circ - \sin 45^\circ$
- 6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$

حل: در روابط فوق به عوض هر نسبت مثلثاتی قیمت عددی آن را وضع می‌نماییم:

$$1) x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$2) y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$3) x = \tan 60^\circ - \sin 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$4) y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6}$$

$$5) x = \tan 45^\circ - \sin 45^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

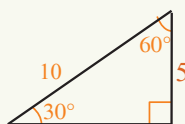
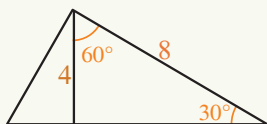
$$6) y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

یادداشت: در هر مثلث قائم الزاویه داریم که:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

تمرین

در اشکال زیر نسبت‌های مثلثاتی \sin ، \cos ، \tan و \cot زوایای 30° و 60° را دریابید:



- مثلثات (Trigonometry) از دو کلمه یونانی (Trigon) یعنی مثلث و (metron) یعنی اندازه کردن تشکیل شده و عبارت از علمی است که از روابط بین عناصر مثلث بحث می کند.
- در هر مثلث قائم الزاویه نسبت طول ضلع مقابل زاویه حاده بر طول وتر را به نام sine زاویه حاده یاد می کنند.
- در هر مثلث قائم الزاویه نسبت طول ضلع مجاور زاویه حاده بر وتر را به نام cosine زاویه حاده یاد می کنند.
- در هر مثلث قائم الزاویه نسبت sin یک زاویه حاده θ بر cos زاویه حاده θ را به نام tan زاویه حاده θ یاد می کنند.

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$
- در هر مثلث قائم الزاویه نسبت cos یک زاویه حاده θ بر sin زاویه حاده θ را به نام cot زاویه حاده θ یاد می کنند.

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$
- در هر مثلث قائم الزاویه رابطه $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ موجود است.
- نسبت های مثلثاتی sin، cos و tan بدون ذکر زاویه در مقابل آنها بی معنی اند.
- قیمت $\sin 30^\circ$ با $\cos 60^\circ$ مساوی است.
- قیمت $\sin 60^\circ$ با $\cos 30^\circ$ مساوی است.
- قیمت $\sin 45^\circ$ با $\cos 45^\circ$ مساوی است.

تمرینات فصل چهارم

- در سؤالات زیر به هر سؤال چهار جواب داده شده که یکی از آنها صحیح است، جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- نسبت $\sin \alpha$ یک زاویه حاده عبارت است از:

$\frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه حاده}}{\text{طول وتر}} \quad (c)$	$\frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه حاده}}{\text{طول وتر}} \quad (a)$
$\frac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مقابل زاویه حاده}} \quad (d)$	$\frac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مجاور زاویه حاده}} \quad (b)$

2- نسبت $\tan \alpha$ مساوی است به:

$\frac{1}{\cos \alpha} \quad (d)$	$\frac{1}{\sin \alpha} \quad (c)$	$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (b)$	$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (a)$
-----------------------------------	-----------------------------------	---	---

3- قیمت افاده $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ مساوی است به:

-1 (d)	-2 (c)	2 (b)	1 (a)
--------	--------	-------	-------

4- $\sin 45^\circ$ و $\cos 45^\circ$ مساوی است به:

$\sqrt{2} \quad (d)$	$\frac{2}{\sqrt{2}} \quad (c)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (b)$	1 (a)
----------------------	--------------------------------	--------------------------------	-------

5- قیمت افاده $\frac{\sin 30^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ + \sin 30^\circ}$ مساوی است به:

(d) هر سه جواب صحیح است.	-1 (c)	1 (b)	0 (a)
--------------------------	--------	-------	-------

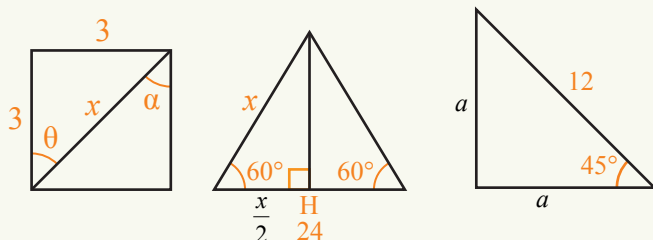
- جاهای خالی را با جمله های مناسب تکمیل کنید.
- 1- در یک مثلث قائم الزاویه مجموع دو زاویه حاده آن است.
- 2- نسبت ساین یک زاویه حاده عبارت است از.....
- 3- Trigonometry از دو کلمه و تشکیل گردیده است.
- 4- $\tan\theta \cdot \cot\theta$ مساوی به..... است .

• کدام یک از جملات زیر صحیح و کدام آن ها غلط اند در مقابل صحیح حرف (ص) و در مقابل غلط حرف (غ) را بگذارید.

- 1- () نسبت $\sin\theta$ مساوی به $\frac{\text{طول ضلع مقابل } \theta}{\text{طول وتر}}$ است.
- 2- () $\sin 30^\circ$ و $\cos 60^\circ$ با هم مساوی اند.
- 3- () نسبت $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ مساوی به $\cot\theta$ است.

• سوالات زیر را حل نمایید.

1- در اشکال زیر نسبت های مثلثاتی زوایای داده شده را دریافت نمایید.



2- در سؤالات زیر قیمت های A و B را محاسبه کنید.

1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$

6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$

9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

3- اگر $\sin \alpha = \frac{7}{12}$ باشد $\cos \alpha$ و $\tan \alpha$ را دریابید.

4- اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد نسبت های مثلثاتی $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را دریابید.

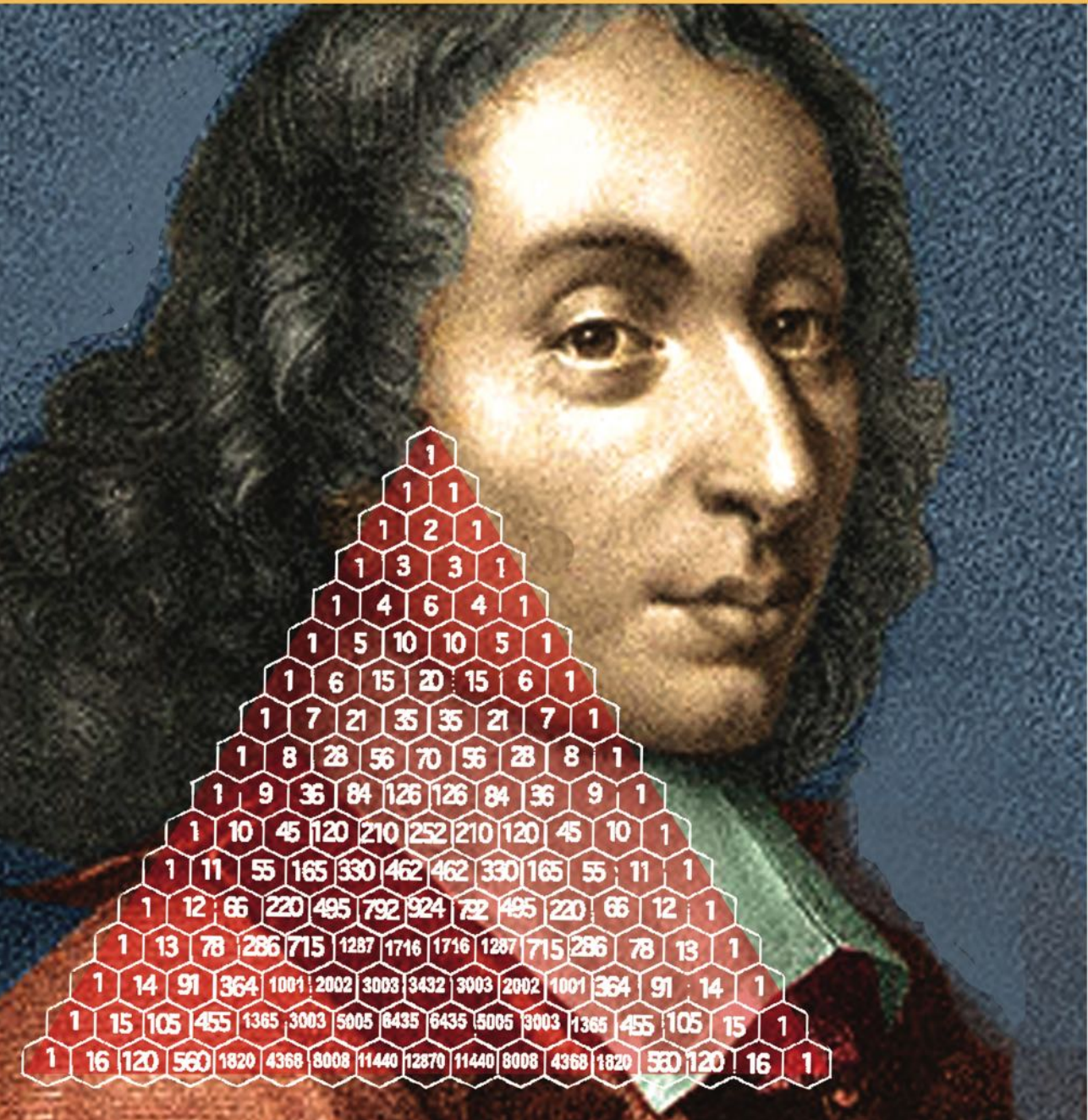


فصل پنجم

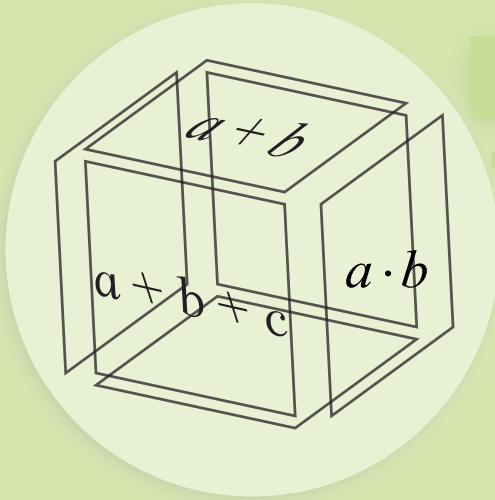
افاده های الجبری

بلز پاسکال، عالم، ادیب، فیلسوف دینی، ریاضیدان، فزیکدان و یکی از متفکرین جهان، متولد در کلرمون مرکز فرانسه است.

چون وی در ریاضیات استعداد فوق العاده داشت تاسیس نظریه احتمال، قضیه های هندسه اقلیدسی، قضیه از هندسه تصویری، قضیه پاسکال، نخستین ماشین حساب، مثلث پاسکال یا گراف ضرب دو جمله ای، حساب دیفرانسیل و انتگرال و بعضی از خواص منحنی سیکلوئید به او منسوب است که سرانجام در سال 1662 درگذشت.



1																
1	1															
1	2	1														
1	3	3	1													
1	4	6	4	1												
1	5	10	10	5	1											
1	6	15	20	15	6	1										
1	7	21	35	35	21	7	1									
1	8	28	56	70	56	28	8	1								
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1							
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1						
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1					
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1				
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1			
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1		
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1



افاده های الجبری را که در سطوح شکل مقابل تحریر شده نامگذاری نمایید.

فعالیت

افاده های زیر را در نظر بگیرید:

a) $2x$ b) $\frac{1}{3}xy^3$ c) $\sqrt{2}xym'$ d) $9x^2$

e) $5x$ f) $2xy^3$ g) $3x^2$ h) $\frac{4x^2}{x-1}$

• یک حده های که باهم مشابه اند نشانی کنید.

• افاده های الجبری زیر را تا حد ممکن ساده کنید.

a) $2x + 6x^2 + \sqrt{2}xym^4$ b) $3x^2 + 6x^2$ c) $\frac{1}{3}xy^3 + 2x$ d) $\frac{1}{3}xy^3 + 2xy^3$

• افاده هایی که ساده نمی شوند آن را چگونه باید نوشت و برای هر یک چه نام هایی پیشنهاد می کنید.

• بزرگ ترین توان افاده ها را نظر به X در هر حالت تعیین کنید.

از فعالیت فوق می توانیم بنویسیم که:

هرگاه در یک افاده الجبری پس از ساده کردن حدهای مشابه، یک حد داشته باشیم آن را یک حده (Monomial)، اگر جمع و یا تفریق دو حد را داشته باشیم آن را دو حده (Binomial) اگر جمع و یا تفریق سه حد داشته باشیم آن را سه حده (Trinomial) و افاده الجبری یک یا چند حده را پولینوم (Polynomial) می نامیم، به شرطیکه توانهای حروف (متحولین) شان در ست اعداد مکمل $C = \{0, 1, 2, \dots\}$ شامل باشند.

در هر افاده الجبري بزرگترین توان نظر به يك متحول خاص را درجه آن افاده الجبري نظر به آن متحول می گویند.
مثال: جدول زیر را کامل کنید:

افاده های الجبري	نامگذاری				درجه افاده	
	چند حده	سه حده	دو حده	یک حده	نظر به y	نظر به x
$\sqrt{32}y^2 - 3y + 2y^3$						
$3x^2 - 7x$			✓			2
$6x^2 - 4x - 1$						
$0.4x^2y - 2x^4 + 16y^2$						
$13x - 2y^3 + 6x^3y$						
$3 - 5 + x^2 - y^3 - 2xy$						
$4x^2 - 2x + 6x^2 - 5x$						

تمرین

1- افاده های زیر را ساده نموده بعد درجه آنها را نظر به هر يك از متحول ها تعیین کنید.

a) $x^2 - 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x$

b) $\sqrt{2}mn^2 - \frac{1}{2}m + 2\sqrt{2}n^2m + 3m$

2- افاده های الجبري زیر چندحده بوده، درجه هر کدام آنها را نظر به هر يك از متحول ها تعیین کنید:

a) $6x^2 - 4x - 12xy^6 - 2x^5$

b) $8x^6 - 4xy^6 - 5x^2$

3- در افاده های A و B زیر حدود مشابه را مشخص و چند حده را ساده کنید.

$$A = 4xy + 2x^2y - 3xy^2 - \sqrt{2}xy - 0.5x^2y - \frac{1}{2}xy^2$$

$$B = \frac{4}{3}a^2b - a^2 + b^2 - 0.7a^2b - 2a^2 - 3b^2 + xy$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

ضرب افاده‌های دو حده

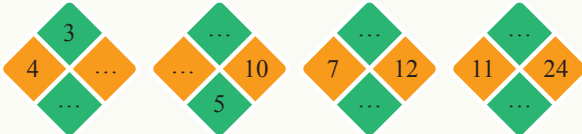
اگر a و b دو عدد باشند با ضرب نمودن قوس‌های مقابل بگویید که حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد مذکور مساوی به کدام عدد ها اند؟

فعالیت

• چه رابطه‌ی بین اعداد در هر مربع وجود دارد؟



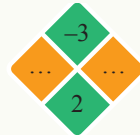
• با استفاده از رابطه فوق جاهای خالی زیر را پر کنید:



$$(x+4)(x+3) = x^2 + \dots x + \dots x + \dots = x^2 + \dots x + \dots$$



$$(x-3)(x+2) = x^2 + \dots x - \dots x - \dots = x^2 - \dots x - \dots$$



$$x^2 + 8x + 12 = (x + \dots)(x + \dots)$$

$$x^2 + x - 6 = (x - \dots)(x + \dots)$$

از فعالیت ذکر شده به مشاهده می رسد که:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \times b$$

مثال: عملیه های ضرب زیر را انجام دهید.

a) $(t-4)(t+5)$

b) $(a+3)(a+4)$

c) $(x-4)(x+2)$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$

حل:

a) $(t-4)(t+5) = t^2 + (-4+5)t + (-4 \times 5) = t^2 + t - 20$

b) $(a+3)(a+4) = a^2 + (3+4)a + (3 \times 4) = a^2 + 7a + 12$

c) $(x-4)(x-2) = x^2 + (-4-2)x + (-4 \times -2) = x^2 - 6x + 8$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2}) = y^2 + (\frac{2}{3}+\frac{1}{2})y + (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}) = y^2 + \frac{7}{6}y + \frac{2}{6}$

تمرین

افاده های الجبری زیر را باهم ضرب نمایید:

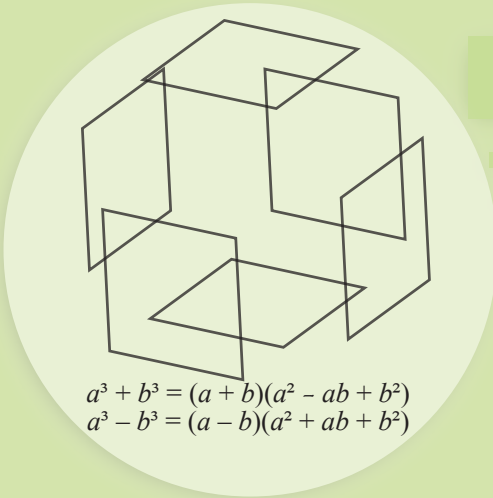
a) $(2x-1)(x+3)$

b) $(\sqrt{2}+x)(x-\sqrt{2})$

c) $(a-3)(a+4)$

d) $(0.5xm - \frac{1}{2})(4xm + 0.5)$

مجموع و تفاضل مکعبات



$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

به شکل مقابل توجه نموده و بگویید که این سطوح کدام شکل منظم هندسی را می سازند؟

فعالیت

• در جدول زیر جاهی خالی را پر کنید:

a	b	$a^3 + b^3$	$(a + b)$	$a^2 - ab + b^2$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5	2				
4	1				
-3	2				
3	-2				
4	4				

• چه رابطه‌ی بین دو ستون تحت $a^3 + b^3$ و $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ مشاهده می کنید؟

• آیا می توانید یک رابطه مشابه را برای $a^3 - b^3$ بنویسید؟

از فعالیت بالا می توان نتیجه گرفت:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

این روابط را می توانیم به شکل الجبری ثبوت نمود:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

$$\begin{aligned}
 (a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2) \\
 &= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\
 &= a^3 - b^3
 \end{aligned}$$

مثال 1: افاده های الجبری زیر را به اساس مطابقتهای $a^3 + b^3$ و $a^3 - b^3$ تجزیه کنید:

a) $b^3 - 8$ b) $a^6b^6 - x^3y^3$ c) $h^3 + \frac{1}{h^3}$

حل: ابتدا افاده های الجبری را به شکل مطابقت $a^3 \pm b^3$ تبدیل نموده، بعداً به کمک مطابقت آن را تجزیه می نماییم:

a) $b^3 - 8 = b^3 - 2^3 = (b-2)(b^2 + 2b + 4)$

b) $a^6b^6 - x^3y^3 = (a^2b^2)^3 - (xy)^3 = (a^2b^2 - xy)(a^4b^4 + a^2b^2xy + x^2y^2)$

c) $h^3 + \frac{1}{h^3} = h^3 + \left(\frac{1}{h}\right)^3 = \left(h + \frac{1}{h}\right)\left(h^2 - 1 + \frac{1}{h^2}\right)$

مثال 2: افاده $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$ را ساده کنید.

حل: ابتدا مطابقت صورت را به شکل انکشاف یافته آن می نویسیم:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = x - y$$

تمرین

افاده های زیر را توسط مطابقت ها تجزیه نمایید.

a) $a^6b^6 + x^3y^3$ b) $8 + b^3$ c) $x^{12} - y^{12}$

d) $125x^3 + y^3$ e) $0.125x^3 - 1$ f) $\frac{1}{x^3} + 1$

g) $8 - 64a^3b^6$ h) $8a^3 - 27b^3$ i) $b^6 - 1$

$$\frac{2xy^2 - 4x^2y^4}{-2xy^2} = ?$$

توجه نمایید! افادهٔ مخرج به کدام افادهٔ صورت ارتباط دارد؟ می‌توانید آن را ساده‌سازی کنید؟

فعالیت

• وقتی کسری مانند $\frac{995}{7}$ را دیگر نتوانیم ساده یا اختصار کنیم، چه عملی انجام می‌دهیم؟

• افاده‌های الجبری زیر را تا آنجا که ممکن است ساده کنید:

a) $\frac{2m^2y - 3x^3y^4 + 24xy^3}{-3xy^2}$, $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ b) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, $x \neq 2$

c) $\frac{x^3 - x^2 - x - 6}{x + 2}$, $x \neq -2$

• به عملیات زیر توجه نموده توضیح دهید که در حل پی در پی چه کاری انجام شده است؟ چرا؟

$$\begin{array}{r} 995 \quad | \quad 7 \\ -7 \quad | \quad 142 \\ \hline 29 \\ 28 \\ \hline 15 \\ 14 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 11x - 6 \quad | \quad x + 2 \\ \pm x^3 \pm 2x^2 \\ \hline -4x^2 - 11x \\ \mp 4x^2 \mp 8x \\ \hline -3x - 6 \\ \mp 3x \mp 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

• در حل جز (a) چرا عملیهٔ تقسیم را از اولین رقم چپ یعنی عدد 9 شروع کردیم؟

• فکر کنید! عملیهٔ تقسیم در جز (b) را چرا از x^3 آغاز نمودیم؟

مرتب کردن و نوشتن یک افاده الجبری از بزرگترین به کوچکترین توان را ترتیب نزولی پولینوم ها می نامند.

در تقسیم دو افاده الجبری مراحل زیر را انجام می دهیم:

- 1- پولینوم مقسوم و مقسوم علیه را به شکل نزولی ترتیب می نماییم.
- 2- حد اول پولینوم مقسوم را بالای حد اول پولینوم مقسوم علیه تقسیم می نماییم و حاصل تقسیم آن حد اول خارج قسمت می باشد.
- 3- خارج قسمت حاصل شده را به هر حد مقسوم علیه ضرب نموده و حاصل ضرب را از حدود مشابه مقسوم تفریق می نماییم.
- 4- حد بعدی مقسوم را پایین نموده پهلوی باقی مانده می گذاریم، بعداً حد اول افاده را بالای حد اول مقسوم علیه تقسیم و حاصل آن را به همه حدود مقسوم علیه ضرب، حاصل آن را از افاده باقی مانده مقسوم تفریق می نماییم.
- 5- مراحل 2، 3 و 4 را تا وقتی ادامه می دهیم که حدود باقی مانده صفر و یا درجه آن به اندازه یک از مقسوم علیه کمتر گردد.

مثال 1: افاده $x^3 - 3x^2 - 23x + 30$ را بالای $x - 6$ تقسیم نمایید.

مراحل تقسیم	$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 - 23x + 30 \\ \underline{-x^3 + 6x^2} \\ 3x^2 - 23x \\ \underline{-3x^2 + 18x} \\ -5x + 30 \\ \underline{+5x - 30} \\ 0 \end{array}$
-------------	---

}

$$I - \frac{x^3}{x} = x^2$$

$$II - \frac{3x^2}{x} = 3x$$

$$III - \frac{-5x}{x} = -5$$

مثال 2: افاده $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4$ را بالای افاده $x^2 - x - 4$ تقسیم کنید.

حل: پولینوم مقسوم و مقسوم علیه را به شکل نزولی ترتیب نموده بعداً عملیه تقسیم را انجام می دهیم.

مراحل تقسیم

$$\begin{array}{l}
 I - \frac{x^5}{x^2} = x^3 \\
 II - \frac{x^4}{x^2} = x^2 \\
 III - \frac{3x^3}{x^2} = 3x \\
 IV - \frac{8x^2}{x^2} = 8
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} I \\ II \\ III \\ IV \end{array}} \right\}
 \begin{array}{r}
 x^5 + 0 \cdot x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4 \quad | \quad x^2 - x - 4 \\
 \underline{= x^5 \mp x^4 \mp 4x^3} \\
 x^4 + 2x^3 + x^2 \\
 \underline{= x^4 \mp x^3 \mp 4x^2} \\
 3x^3 + 5x^2 - 8x \\
 \underline{= 3x^3 \mp 3x^2 \mp 12x} \\
 8x^2 + 4x + 4 \\
 \underline{= 8x^2 \mp 8x \mp 32} \\
 12x + 36
 \end{array}$$

همان طوریکه برای یافتن صحت تقسیم دو عدد بالای همدیگر دو شرط را بررسی می کردیم، برای یافتن صحت تقسیم دو افاده الجبری بالای همدیگر نیز دو شرط زیر باید بررسی شود:

1- حاصل ضرب خارج قسمت و مقسوم علیه جمع باقیمانده باید با افاده الجبری مقسوم برابر باشد.

2- درجه باقیمانده از درجه مقسوم علیه باید به اندازه یک کوچکتر باشد.

طوریکه در مثال 2:

$$\begin{aligned}
 (x^2 - x - 4)(x^3 + x^2 + 3x + 8) + 12x + 36 \\
 = x^5 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4
 \end{aligned}$$

مثال 3: افاده $2x^2 + x^4 - 3x + 1$ را بالای افاده $x + 3$ تقسیم کنید.
حل: ابتدا افاده های مقسوم و مقسوم علیه را به شکل نزولی ترتیب می دهیم.

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 0 \cdot x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x + 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 11x - 36 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^4 \pm 3x^3} \\
 -3x^3 + 2x^2 \\
 \underline{\mp 3x^3 \mp 9x^2} \\
 11x^2 - 3x \\
 \underline{\pm 11x^2 \pm 33x} \\
 -36x + 1 \\
 \underline{\mp 36x \mp 108} \\
 109
 \end{array}$$

تمرین

- تقسیم نمایید در پایان درست بودن تقسیم را بررسی کنید.

1) $(2t^3 - 4t^2 - 2t - 6) \div (t^2 + 9t + 7)$

2) $(1 - x^2 - x) \div (1 - x)$

3) $(2y^3 + y - 3y) \div (y^2 - 3y - 1)$

4) $(2x^3 + 5x^2 - x - 1) \div (x + 3)$

• افاده الجبری که از یک حد تشکیل شده باشد به نام مونوم یا یک حده یاد می شود،

$$\text{مانند: } ax^n, 2x, -5x^3y^2$$

• افاده الجبری که از دو حد تشکیل شده باشد به نام باینوم یا دو حده یاد می شوند،

$$\text{مانند: } ax^2 + b$$

• افاده الجبری که از سه حد تشکیل شده باشند به نام ترینوم یا سه حده یاد می شوند،

$$\text{مانند: } ax^2 + bx + c$$

• افاده الجبری که از یک یا چندین حد تشکیل شده باشند و توانهای حروف آنها در

ست اعداد مکمل شامل باشند به نام پولینوم یاد می شوند.

$$\text{مانند: } 12, -2x^2, \dots, x, ax^5 + bx^3 + cx^2 - x - d$$

• بزرگترین توان نظر به یک متحول خاص به نام درجه پولینوم نظر به آن متحول یاد

می شود.

• ترتیب پولینوم که از چپ به راست از بزرگترین توان به طرف کوچکترین توان

ترتیب شده باشد به نام ترتیب نزولی یاد می شود.

• مجموعه و تفاضل مکعبات:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

تمرینات فصل پنجم

• در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- حاصل ضرب افاده های $(x-2)(x+3)$ عبارت است از:

(a) $x^2 + 5x + 6$ (b) $x^2 - 5x - 6$

(c) $x^2 + x - 6$ (d) $x^2 - x + 6$

2- حاصل تقسیم $\frac{2x - 4x^3 + 2x^2 + 16x - 8}{2x^2 - 8}$ عبارت است از:

(a) $-2x + 1$ (b) $(-2x + 1)(2x) + \frac{-2x}{2x^2 - 8}$

(c) الف و ب (d) هیچکدام

3- افادهٔ الجبری $6x^2y^6m^9$ چند حده است:

(a) سه حده (b) شش حده

(c) یک حده (d) دو حده

• جاهای خالی را با کلمات و جملات مناسب پر کنید.

1- افاده الجبری $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ یک افاده..... درجه..... است.

2- حاصل تقسیم $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ عبارت از..... است.

3- حاصل ضرب $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ عبارت از..... است.

$$4- a^3 + b^3 = (\dots)(\dots)$$

5- در هر افاده الجبری..... توان نظر به یک متحول خاص را درجه آن افاده

الجبری نظر به آن..... می گوئیم.

• کدام یک از جملات زیر صحیح و کدام آن غلط است، در مقابل صحیح علامه (ص)

و در مقابل غلط علامه (غ) بگذارید.

1- () افاده الجبری که از یک یا چندین حد تشکیل شده باشند و توانهای متحولین

آنها در ست اعداد مکمل شامل باشند به نام پولینوم یاد می گردند.

$$2- a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2) ()$$

$$3- a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) ()$$

4- () مرتب کردن و نوشتن یک افاده الجبری از بزرگترین به کوچکترین توان

را ترتیب نزولی چند حده می نامیم.

• سوالات زیر را حل کنید.

1- ساده سازید.

$$a) \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$$

$$b) \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$c) \frac{a^2b^{-2} - b^2a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$$

2- تقسیم نمایید.

$$a) \frac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$$

$$b) \frac{a^4 - b^4}{a - b}$$

$$c) 2x^3 - x^2 - 4 \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$d) (x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$$

$$e) x^2 - 5x + 64 \div (-x + 5)$$



فصل ششم
نامساوات





نامساوات Inequality



ترازو در کدام حالت قرار دارد چرا؟

در زنده گی روزانه عموماً نیازمند به مقایسه کمیت های نامساوی هستیم، مثلاً برای درجه بندی شاگردان یک صنف مجموعه نمرات آن ها از زیاد به کم درجه بندی می شود، آیا شما می توانید نمونه های دیگری از زنده گی روزانه مثال دهید، که در آن کمیت غیر مساوی با هم مقایسه شده باشند.

هر گاه اعداد توسط یکی از علائم $>$, \leq , $<$, \geq با هم ارتباط داشته باشند به نام نامساوات یاد می شوند. مانند: $5 > 4$, $-3 < 2$...

فعالیت

موقعیت اعداد 3 , $\frac{-3}{2}$, $\sqrt{2}$, -4 , $\frac{2}{3}$ را بالای محور اعداد زیر تعیین کنید.



- با استفاده از علامت مناسب، اعداد فوق را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید.
- چه رابطه یی بین ترتیب اعداد و محل قرار گرفتن آنها روی محور اعداد ملاحظه می گردد.

مشاهدات فعالیت فوق را می توان طور زیر خلاصه کرد:

بالای محور اعداد، عددی که به طرف راست عددی دیگری قرار دارد، بزرگتر از عددی است که طرف چپ آن قرار دارد.

بصورت عموم گاه a , b و c سه عدد حقیقی باشند، می توانیم بنویسیم که:

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

فعالیت

- دو عدد نامساوی را انتخاب نموده رابطه بین آنها را با استفاده از علامت بزرگتر یا کوچکتر نشان دهید.
- به هر دو طرف نامساوات فوق عدد 5 را جمع کنید، آیا در جهت نامساوات تغییری به میان می آید؟
- از هر دو طرف نامساوات عدد 3 را تفریق کنید، آیا در جهت نامساوات تغییری به میان می آید؟

بصورت عموم نتیجه فعالیت فوق را طور زیر می توان بیان کرد:

برای همه اعداد حقیقی a, b, c اگر $a < b$ باشد پس:

$$a + c < b + c$$

$$a - c < b - c$$

فعالیت

- دو عدد نامساوی را انتخاب نموده و رابطه بین آنها را با استفاده از علامه نامساوی ($<$) نشان دهید.
- هر دو طرف نامساوات فوق را در عدد 4 ضرب کنید، آیا در جهت علامه نامساوات تغییری به وجود می آید؟
- هر دو طرف نامساوات فوق را در عدد -4 ضرب کنید، آیا در جهت نامساوی تغییری به میان می آید؟
- در نامساوات $4 < 7$ اگر در هر دو طرف نامساوی، اعداد را معکوس نماییم، آیا در جهت علامه نامساوات تغییری به وجود می آید؟

بصورت عموم مشاهدات فعالیت فوق را می توان طور زیر بیان کرد:

برای همه اعداد حقیقی a, b, c و داریم که اگر:

$$a < b \quad \cdot \quad 0 < c \Rightarrow ac < bc$$

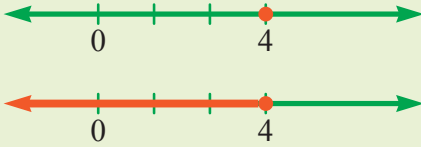
$$a < b \quad \cdot \quad c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

به یاد داشته باشید که عملیه تقسیم عکس عملیه ضرب است، یعنی اگر بخواهیم عددی را بر عدد a تقسیم کنیم مثل آن است که آن عدد را در $\frac{1}{a}$ ضرب کنیم، بنابراین همه خواص ضرب نامساوات ها برای عملیه تقسیم نیز قابل تطبیق است.

تمرین

با جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کردن یک عدد مثبت دلخواه و یک عدد منفی به اطراف نامساوات $9 < -3$ خواص نامساوات را تحقیق کنید.



دو جمله الجبری $x = 4$ و $x \leq 4$ را در نظر بگیرید.
چه شباهت و چه فرقی بین این دو عبارت می بینید؟

فعالیت

- برای کدام قیمت عددی x معادله $x + 3 = 7$ صدق می کند؟
- آیا به غیر از قیمت عددی دریافت شده x ، قیمت دیگری وجود دارد که، در معادله صدق کند؟
- برای کدام قیمت عددی x نامساوات $x + 3 < 7$ صدق می کند؟
- آیا غیر از قیمت عددی دریافت شده x ، قیمت دیگری وجود دارد که به نامساوات فوق صدق کند؟
- برای چند قیمت عددی x نامساوی فوق صحیح است؟

از فعالیت فوق مشاهده می شود که نامساواتها برخلاف مساواتها دارای حل های زیادی اند.

افاده های الجبری که توسط یکی از علائم $>$ ، $<$ ، \leq ، \geq با هم دیگر مرتبط شده باشند و در آن متحول دارای یک باشد به نام نامساوات یک مجهول درجه یک و یا نامساوات خطی یاد می شود.

نامساوات های زیر نمونه هایی از نامساوات های درجه یک یا خطی می باشند.

$$x + 3 < 0 \quad , \quad 2x - \frac{1}{3} > 3 - x$$

$$6x + 7 \leq 5 \quad , \quad \frac{x}{5} + \sqrt{2} \geq 12$$

بصورت عموم برای پیدا کردن قیمت‌های عددی x که در نامساوات صدق کند آن نامساوات را با استفاده از خواص آنها طوری تغییر می‌دهیم که در یک طرف آن مجهول و در طرف دیگر آن اعداد قرار گیرد.

هدف از حل نامساوات این است که برای متحول آن ساحه، قیمت‌هایی را دریابیم که در آن ساحه نامساوات حقیقت داشته باشد که این ساحه را به نام ساحه حل نامساوات یاد می‌کنند.

مثال 1: نامساوی $x + 4 \geq -7$ را حل کنید و ساحه حل نامساوات را روی محور اعداد نشان دهید.

حل: با اضافه کردن عدد -4 به اطراف نامساوات داریم:

$$x + 4 - 4 \geq -7 - 4$$

$$x \geq -11$$



مثال 2: نامساوات $2x + 1 > 5$ را حل کنید.

حل: با استفاده از خواص نامساوات می‌توانیم معلوم را در یک طرف و مجهول را به طرف دیگر نامساوات به شکل زیر انتقال دهیم:

$$2x + 1 > 5$$

از اطراف نامساوات، عدد 1 را تفریق می‌کنیم:

$$2x + 1 - 1 > 5 - 1$$

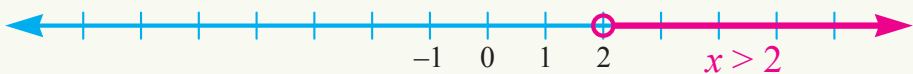
$$2x > 4$$

اطراف نامساوات را به 2 تقسیم یا در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} \times (2x) > \frac{1}{2} \times 4$$

$$x > 2$$

یعنی برای تمام قیمت‌های بزرگتر از 2 نامساوات فوق صدق می‌کند. این ساحه اعداد را روی محور اعداد طور زیر نشان داده می‌توانیم.



برای حل غیر مساوات نکات زیر را در نظر می گیریم:

• معلوم را به یک طرف و مجهول را به طرف دیگر نامساوات با در نظر داشت خواص نامساوات انتقال می دهیم.

• اعداد معلوم را باهم و حدود مجهول را با هم جمع می کنیم.

• جهت یافتن قیمت های عددی متحول اطراف نامساوات را با در نظر داشت خواص نامساوات بر ضریب متحول تقسیم می کنیم.

مثال 3: نامساوات $3x + 1 < x - 5$ را حل کنید.

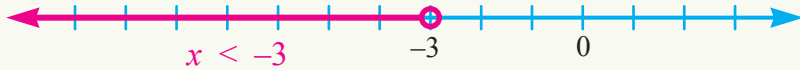
حل:

$$3x - x < -5 - 1$$

$$2x < -6$$

$$x < -\frac{6}{2}$$

$$x < -3$$



مثال 4: نامساوات زیر را حل کنید.

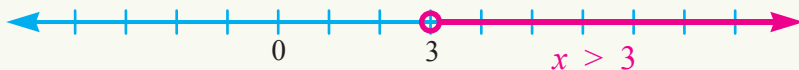
$$x + 5 < 3x - 1$$

$$x - 3x < -1 - 5$$

$$-2x < -6$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{-6}{-2}$$

$$x > 3$$



حل نامساوات‌های زیر را به دست آورده ساحتی حل آن را بالای محور اعداد نشان دهید.

a) $4x \geq 8$

b) $8 + x < 5$

c) $5 + x < 2x - 1$

d) $-3x - 4 > x + 7$

e) $\frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

f) $0.5 - x < 3x - 1$

g) $2 - x \leq 2$

h) $2x - 5 - 7x > 0$

i) $5x + 6 > 0$

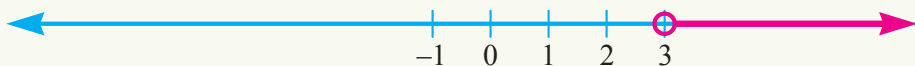


$$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$$

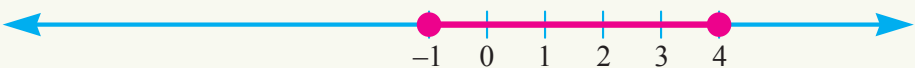
در حل یک نامساوات اعداد زیادی را می‌توان به دست آورد که حل آن نامساوات باشند. همه اینگونه اعداد حقیقی را در یک ست در نظر گرفته آن را ست حل نامساوات می‌نامیم.

طور مثال $x > 3$ ست حل نامساوات $3x - 2 > 7$ است. زیرا هر عدد بزرگتر از 3 در نامساوات $3x - 2 > 7$ صدق می‌کند، این ست حل‌ها را به زبان ریاضی طور زیر نشان می‌دهیم:

و می‌خوانیم که: x شامل اعداد حقیقی طوری که x بزرگتر از 3 باشد. این ست اعداد را همچنین روی خط اعداد طور زیر نشان می‌دهیم:



مشاهده می‌شود که این مجموعه اعداد در یک قسمت از محور اعداد شامل می‌شود که در ریاضی آن را به نام انتروال معرفی می‌کنیم. در محور اعداد زیر انتروال مشخص شده شامل اعدادی است که بزرگتر یا مساوی از -1 و کوچکتر یا مساوی از 4 است.



این انتروال را به شکل $[-1, 4]$ یا مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 4\}$ نشان می‌دهیم. دقت کنید که اعداد -1 و 4 در انتروال شامل هستند. در حالتی که نقاط انتهایی خود شامل انتروال باشند، انتروال را انتروال بسته می‌گویند. اگر انتروال نقاط -1 و 4 را در بر نداشته باشد، آن را به نام انتروال باز یاد می‌کنند و طور زیر آن را نمایش می‌دهیم.

$$(-1, 4) = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 4\}$$

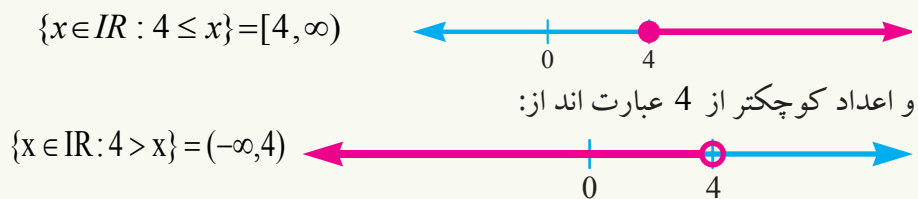
اگر انتروال قبل تنها یکی از نقاط انتهایی مثلاً 4 را در بر داشته باشد، آن را به نام انتروال نیمه باز یا (نیمه بسته) می خوانیم و آن را طور زیر نمایش می دهیم:



در حالت کلی برای هر دو عدد حقیقی a و b که در آن $a < b$ باشد داریم:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$		انتروال بسته a و b
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$		انتروال باز a و b
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$		انتروال نیمه باز a و b
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$		انتروال نیمه بسته a و b

توجه کنید که روی محور اعداد می توانیم انتروال هایی را در نظر بگیریم که از یک طرف محدود نباشد. در این حالت انتروال را با استفاده از علامت ∞ که آن را بی نهایت می خوانیم، نمایش می دهیم. مثلاً ست اعداد بزرگتر یا مساوی به 4 را به صورت زیر نشان می دهیم:



بصورت عموم اگر a یک عدد حقیقی باشد داریم:

- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ اعداد حقیقی بزرگتر از a
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی از a
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ اعداد حقیقی کوچکتر از a
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی از a

تمرین

1- انتروال های زیر را به شکل ست بنویسید بعد به روی خط اعداد نشان دهید:

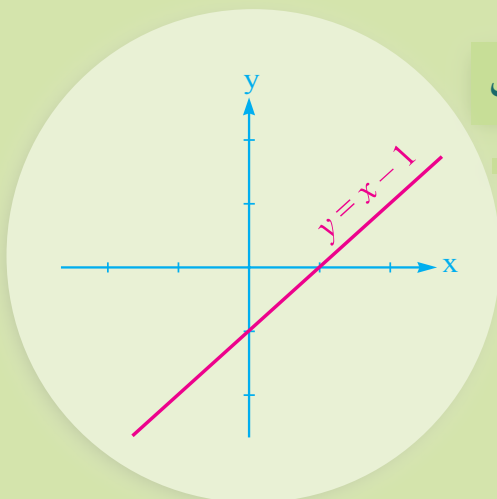
- 1) $[5, 7]$ 2) $(9, -3)$ 3) $[-2, 8)$ 4) $(6, 1]$ 5) $[2, \infty)$

2- ست های زیر را به شکل انتروال بنویسید:

- 1) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 6\}$ 2) $B = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 5\}$

- 3) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 4\}$

تعیین اشاره (علامه) بینوم درجه اول



در شکل مقابل برای کدام قیمت‌های x خط مستقیم $y = x - 1$ بالای محور x و برای کدام قیمت‌های x خط پایین محور x است؟

فعالیت

- افادهٔ الجبری $2x - 4$ چند حده است؟
- این افاده به کدام قیمت متحول x صفر است؟
- این افاده به کدام قیمت‌های متحول x مثبت است؟
- این افاده به کدام قیمت‌های متحول x منفی است؟

ارائهٔ ریاضیکی مطالب فوق را به طور خلاصه در یک جدول به صورت زیر نشان می‌دهند.

x	$x < 2$	2	$x > 2$
$2x - 4$	-	0	+

در این جدول به مشاهده می‌رسد که بینوم $2x - 4$ در عدد 2 مساوی صفر بوده، برای قیمت‌های کوچکتر از 2 بینوم دارای اشارهٔ منفی در حالیکه برای قیمت‌های بزرگتر از 2 بینوم دارای اشارهٔ مثبت است.

مثال: اشارهٔ بینوم $-\frac{1}{2}x + 3$ را تعیین نمایید.

حل: اول قیمتی که بینوم در برابر آن صفر می‌گردد، تعیین می‌کنیم:

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = -3 \Rightarrow x = 6$$

سپس قیمت‌هایی که بینوم در برابر آنها مثبت می‌شود به دست می‌آوریم:

$$-\frac{1}{2}x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x > -3 \Rightarrow x < 6$$

به همین ترتیب قیمت‌هایی که در برابر آن بینوم منفی می‌شود عبارت‌اند از:

$$-\frac{1}{2}x + 3 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x < -3 \Rightarrow x > 6$$

نتایج به دست آمده را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

x	$x < 6$	6	$x > 6$
$-\frac{1}{2}x + 3$	+	\emptyset	-

یادداشت: در حالت کلی برای تعیین اشاره $y = ax + b$ اول قیمتی که بینوم در آن مساوی به صفر می‌گردد به دست می‌آوریم و جدول تعیین اشاره آن را طور زیر تشکیل می‌دهیم؛ اگر $a > 0$ باشد داریم که:

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a} < x$
$ax + b$	مخالف علامه a	\emptyset	موافق علامه a

اگر $a < 0$ باشد داریم که:

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a} < x$
$ax + b$	موافق علامه a	\emptyset	مخالف علامه a

تمرین

اشاره افاده‌های الجبری زیر را تعیین کنید.

1) $3x - 9$

2) $7x - 2$

3) $\frac{3}{4}x - 1$

4) $0.5x + 10$

5) $2x - 4 + x - 1$

6) $\frac{1}{2}x + 3$

خلاصه فصل ششم

- هرگاه اعداد توسط یکی از علائم $>$, $<$, \geq , \leq باهم مرتبط شده باشند به نام نامساوات یاد می‌شوند.
- اگر به اطراف یک نامساوی یک عدد حقیقی را جمع و یا تفریق نماییم جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.
- اگر اطراف یک نامساوی را به عددی حقیقی مثبت خلاف صفر ضرب و یا تقسیم نماییم جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.
- اگر اطراف یک نامساوی را به یک عدد حقیقی منفی ضرب و یا تقسیم نماییم جهت نامساوی تغییر می‌کند.

$$[a, b] = \{x \in IR : a \leq x \leq b\} \quad \text{انتروال بسته}$$

$$(a, b) = \{x \in IR : a < x < b\} \quad \text{انتروال باز}$$

$$(a, b] = \{x \in IR : a < x \leq b\} \quad \text{انتروال نیم باز}$$

$$[a, b) = \{x \in IR : a \leq x < b\} \quad \text{انتروال نیم بسته}$$

تمرینات فصل ششم

- در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- کدام یک از نامساوی‌های زیر صحیح است؟

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{6} \leq 2 - \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$ c) $\sqrt{9+16} \geq 5$ d) هر سه درست است.

2- کدام یک از ست‌های زیر ست حل نامساوی $x+3 \leq 5$ است؟

a) $\{x \in IR : x \leq 2\}$ b) $\{x \in IR : 2 \leq x\}$
 c) $\{x \in IR : x \leq 8\}$ d) $\{x \in IR : x < -2\}$

3- کدام یک از انتروال‌های زیر حل نامساوات $2x+3 > -1$ است؟

a) $[-2, \infty)$ b) $(2, \infty)$ c) $(1, \infty)$ d) $(-2, \infty)$

4- اگر $0 < a < b$ باشد، کدام یک از رابطه‌های زیر صحیح است؟

a) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ b) $\frac{-1}{b} < \frac{-1}{a}$ c) $-b < -a$ d) c و b درست اند

• جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- در نامساوی $ax + b < 0$ ست همه که نامساوی را صدق کند، به نام ست حل نامساوی فوق یاد می‌شود.

2- انتروال $[4, 5]$ را به نام انتروال یاد می‌کنند.

3- بینوم $2x + 4$ برای قیمت‌های منفی می‌گردد.

• کدام یک از جمله‌های زیر صحیح و کدام یک آن غلط است، در مقابل صحیح حرف (ص) و در مقابل غلط حرف (غ) بگذارید.

1- () ست حل‌های یک نامساوی یک عنصر دارد.

2- () ست $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 5\}$ یک انتروال بسته است.

3- () ست حل‌های یک نامساوی خطی همیشه حل بی‌شمار دارد.

• سؤالات زیر را حل نمایید.

1- حل نامساوی‌های زیر را به دست آرید؟

a) $x - 2 < 3(2x - 9)$

b) $(x - 3)(x + 3) < 0$

2- انتروال‌های زیر را روی محور اعداد مشخص کنید:

a) $[-1, 2]$

b) $(-2, 1]$

c) $[-1, 1)$

d) $(-2, 2)$


3- ست اعداد زیر را به شکل انتروال بنویسید و به روی محور اعداد نشان دهید.

a) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 5\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 6\}$

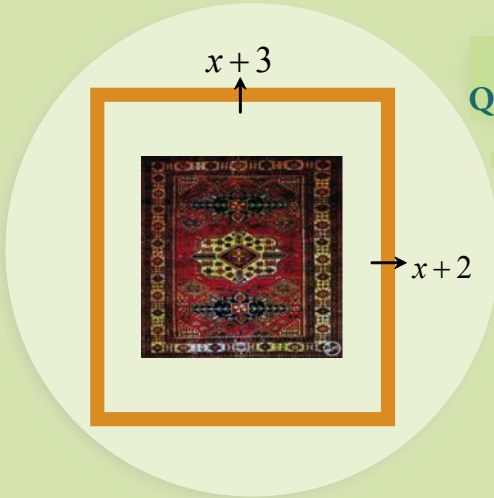
d) $\{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 2\}$



فصل هفتم
معادلات یک مجهوله
درجه دوم



معادلات یک مجهوله درجه دوم Quadratic Equations



اگر یک اطاق توسط یک قالین مربع شکل طوری فرش شود که طول اطاق به اندازه $3m$ و عرض آن به اندازه $2m$ از کنار قالین زیاد باشد مانند شکل مقابل بگویید که مساحت اطاق مذکور چقدر است؟

فعالیت

- افاده الجبری را تعریف کنید.
- معادله را تعریف کنید.
- یک معادله یک مجهوله درجه اول را مثال دهید.
- شکل عمومی معادله یک مجهوله درجه یک را بنویسید.
- در معادله $(x-2)(x+3)=0$ حاصل ضرب قوس ها را به دست آرید؟
- درجه معادله بالا را با درجه معادله $x+4=3x-1$ مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می آید:

معادلاتی که یک مجهول داشته و درجه متحول آن مساوی به 2 باشد به نام معادلات یک مجهوله درجه دوم یاد می شوند. که شکل عمومی آن $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ بوده درحالیکه b, a, c اعداد حقیقی و x را مجهول در معادله می گویند. اگر $b=0$ یا $c=0$ باشد در این صورت معادله درجه دو را معادله ناقص گویند.

مثال 1: عددی را به دست آرید که مربع آن به اندازه عدد شش از خود عدد زیادتر باشد.

حل: اگر عدد را x بنامیم بناءً سؤال فوق را به شکل ریاضی طور زیر می نویسیم:
 $x^2 = 6 + x$ یا $x^2 - x - 6 = 0$

برای حل این گونه معادلات از روشی باید استفاده کرد که از آن حل های معادله به دست آید، حل اینگونه مثالها را در درس بعدی بررسی خواهیم کرد.

مثال 2: در معادلات زیر ضرایب a ، b و c را بنویسید:

حل:

- a) $2x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $3x - x^2 = 4$
 c) $4x^2 - 1 = 0$ d) $7x^2 = 49$

جزء	معادلات	ضریب a	ضریب b	ضریب c
a	$2x^2 - 4x + 1 = 0$	2	-4	1
b	$3x - x^2 = 4$	-1	3	-4
c	$4x^2 - 1 = 0$	4	0	-1
d	$7x^2 = 49$	7	0	-49

تمرین

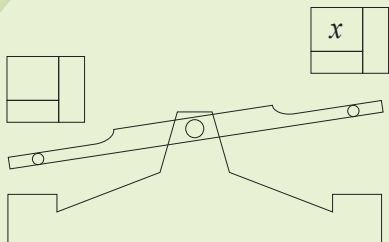
1- در معادلات زیر معادله درجه دوم کامل و ناقص را مشخص کنید؟

- a) $6 - 2x + x^2 = 0$ b) $5x^2 - 3x + 1$ c) $\sqrt{2}x^2 - 4x = 0$ d) $-x^2 = 3$

2- در معادلات زیر ضرایب های a ، b و c را مشخص کنید.

- a) $6x^2 - 4x = 2$ b) $3x - 4 = x^2$ c) $4x - x^2 - 6 = 4x^2$

حل معادلات یک مجهولۀ درجه دوم



آیا می‌توانید قیمتی را برای x پیدا نمایید تا ترازو به حالت تعادل آید؟

فعالیت

x	$2x+4$	$3x-1$
-3		
-2		
0		
5		

• حل معادله $2x+4=3x-1$ را به دست آرید.

• تساوی بالا را برای قیمت‌های مختلف x در جدول مقابل بررسی کنید.

x	x^2-4x+3
-3	
-2	
-1	
0	
1	

• با توجه به جدول و سؤال فوق توضیح دهید که پیدا کردن حل‌های معادله یعنی چه؟

• جدول مقابل را تکمیل نموده از روی آن حل‌های معادله $x^2-4x+3=0$ را به دست آرید.

از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

قیمت‌هایی که مساوات را در یک معادلهٔ یک مجهولۀ درجه دوم برقرار می‌کند، حل معادلهٔ درجه دوم می‌نامند.

مثال 1: مطلوب است دریافت عددی که مربع آن مساوی به 12 واحد بیشتر از خودش باشد؟

حل: هرگاه عدد مذکور را x بنامیم. بیان الجبری آن شکل زیر را خواهد داشت.

$$x^2 = x + 12$$

چگونه می‌توان از مساوات فوق حل‌های آن را دریافت نمود.

هرگاه $x = 1$ را در معادله قرار دهیم دیده می‌شود که طرف راست عدد 13 و طرف چپ عدد 1 به دست می‌آید.

با وضع نمودن یک قیمت دیگر $x = 2$ در معادله مشاهده می‌نماییم که طرف راست مساوات عدد 14 و طرف چپ عدد 4 به دست می‌آید.

با وضع نمودن قیمت بعدی مثلاً $x = 3$ مشاهده می‌گردد که طرف راست عدد 15 و طرف چپ عدد 9 است.

بالاخره با وضع نمودن قیمت بعدی $x = 4$ مشاهده می‌نماییم که طرف راست عدد 16 و طرف چپ نیز عدد 16 است به مشاهده رسید که برای $x = 4$ ، تساوی عددی $16 = 16$ برقرار گردید، بنا بر این $x = 4$ یک حل معادله می‌باشد.

x	x^2	$x + 12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

خلاصه روش بالا را که برای دریافت حل معادله به کار بردیم می‌توانیم در جدول مقابل خلاصه کنیم.

آیا می‌توان طریقه عمومی حل یک معادله درجه دوم را به دست آورد؟

مثال 2: مطلوب است عددی که حاصل جمع مربع آن با عدد 1 مساوی به صفر باشد؟

حل: هرگاه عدد مذکور را x بنامیم افاده الجبری سؤال فوق عبارت است از:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

مانند روش فوق با وضع نمودن اعداد جستجوی خود را برای حل معادله آغاز نموده پیش می‌رویم، به این منظور مانند بالا جدول روبرو را در نظر می‌گیریم.

از روی جدول می‌بینیم که با این روش نمی‌توان تعادل را برقرار نمود، یعنی نمی‌توانیم عددی را برای x دریابیم که برای آن هر دو طرف معادله باهم مساوی گردد. از

طرف دیگر مستقیماً از معادله دیده می‌شود که هرگاه عددی را مربع نموده با یک جمع نماییم هیچ وقت مساوی به صفر شده نمی‌تواند.

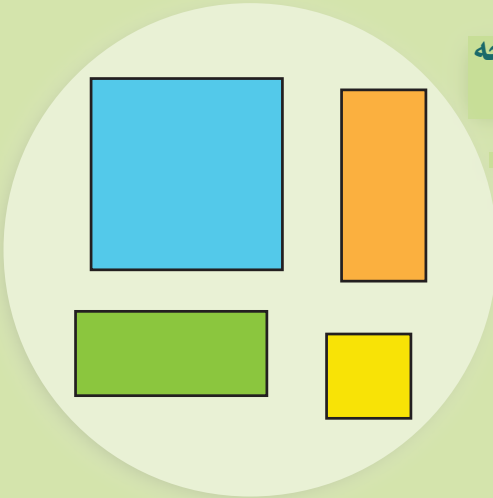
بنابر این معادله فوق حل ندارد.

تمرین

1- یک معادله یک مجهوله درجه دوم را بنویسید که حل نداشته باشد.

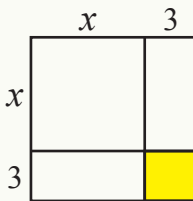
2- معادلات مقابل را حل کنید. a) $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 = 0$

حل معادلات یک مجهوله درجه دوم به طریقه تکمیل مربع



سعی کنید با یکجا کردن این قطعات یک مربع کامل بسازید.

فعالیت



- طول ضلع مربع بزرگ چقدر است؟
- مساحت هر قسمت مربعات مستقل را روی شکل بنویسید.
- معادله $x^2 + 6x - 40 = 0$ را در نظر بگیرید طوری آن را ترتیب کنید که عدد ثابت یک طرف و حدود شامل متحول در طرف دیگر آن قرار گیرند.
- مساحت مربع بزرگ چقدر است؟
- برای این که افاده الجبری شامل متحول با مساحت مربع بزرگ برابر شود چه عددی به دو طرف مساوات اضافه شود؟
- با استفاده از رابطه به دست آمده قیمت x (حل معادله درجه دوم) را به دست آرید.

از انجام فعالیت فوق می توان گفت که:

محمد بن موسی این روش را برای حل معادلات درجه دوم پیدا نمود با تأمین این روش در حل معادلات درجه دوم به صورت عمومی از آن استفاده به عمل می آید در این روش معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شکل $(x + p)^2 = q^2$ در می آید. که مراحل تجزیه آن عبارت است از:

در صورتیکه $a=1$ باشد.

• ابتدا p را مساوی به نصف ضریب X قرار می دهیم، یعنی $p = \frac{b}{2}$

• سپس $q^2 = -c + (\frac{b}{2})^2$ قرار می دهیم.

• در قدم آخر معادله $x + p = q$ را حل می کنیم.

مثال: معادله $x^2 + 2x - 8 = 0$ را به طریقه تکمیل مربع حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به شکل زیر می نویسیم.

$$x^2 + 2x = 8$$

نصف ضریب X را به دست آورده، مربع آنرا به هر دو طرف معادله علاوه می نماییم:

$$x^2 + 2x + 1^2 = 8 + 1^2$$

$$x^2 + 2x + 1 = 9$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$$x+1 = \pm 3 \Rightarrow x = 2, \quad x = -4$$

تمرین

معادلات زیر را به طریقه تکمیل مربع حل نمایید.

$$a) x^2 + 8x - 24 = 0 \quad b) x^2 - x - \frac{5}{4} = 0 \quad c) x^2 - 6x - 13 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

با تقسیم نمودن اطراف معادله $ax^2 + bx + c = 0$ به ضریب x^2 بگویید که مساوات مقابل درست است یا خیر؟

مشاهده نمودیم که معادله‌های درجه دوم یک مجهوله را در حالت عمومی به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ می‌نویسیم، که در آن a ، b و c اعداد حقیقی و a خلاف صفر می‌باشد، برای حل کردن آن طوری زیر عمل می‌نماییم:

• برای معادله $ax^2 + bx + c = 0$ طرفین را به عدد خلاف صفر مانند a تقسیم کنید.
 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

• اعداد ثابت را به یک طرف معادله و اعداد مجهول را به طرف دیگر قرار داده، مربع نصف ضریب x را به طرفین جمع می‌نماییم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

برای ساده نویسی $b^2 - 4ac$ را به Δ نشان می‌دهیم.

فعالیت

برای هر معادله درجه دوم به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- 1- هرگاه $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ باشد، حل‌های معادله کدام‌هااند؟
- 2- هرگاه $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ باشد، حل‌های معادله کدام‌هااند؟
- 3- هرگاه $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ باشد آیا معادله در ست اعداد حقیقی حل دارد؟

از فعالیت فوق نتایج زیر به دست می‌آید:

نتیجه 1: حل هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در حالیکه اعداد a ، b و c

حقیقی و $a \neq 0$ باشد $\Delta = b^2 - 4ac$ گردیده داریم که:
 1- اگر $\Delta > 0$ باشد معادله دو حله (جذر) مختلف دارد؛ که عبارت اند از:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2- اگر $\Delta = 0$ باشد معادله دارای دو حله (جذر) مساوی یا مضاعف می باشد که قرار

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

زیر است:

3- اگر $\Delta < 0$ باشد معادله حل (جذر های) حقیقی ندارد:

نتیجه 2: حاصل جمع و حاصل ضرب حله ها (جذرها):

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

مثال 1: حله های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ را دریافت کنید.

حل: در قدم اول قیمت Δ را پیدا می کنیم. $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 1 = 5$

چون $\Delta > 0$ است بناءً معادله دو حل مختلف العلامه دارد؛ که عبارت اند از:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

مثال 2: حله های معادله $9x^2 - 12x + 4 = 0$ را در صورت موجودیت پیدا کنید.

حل: داریم که: $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4 \times 9 \times 4) = 144 - 144 = 0$

چون $\Delta = 0$ است معادله دو حل مساوی دارد. $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

مثال 3: معادله $5x^2 + 2x + 1 = 0$ را حل کنید.

حل: معادله مذکور حل ندارد زیرا $\Delta < 0$ است، یعنی:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 5 \times 1 = 4 - 20 = -16$$

مثال 4: در معادله $4x^2 - 3x - 1 = 0$ حاصل ضرب و حاصل جمع جذور معادله را دریابید.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4} \quad \text{حل:}$$

تمرین

معادلات زیر را حل نمایید.

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$

• شکل عمومی هر معادله درجه دوم عبارت از $ax^2 + bx + c = 0$ بوده، طوریکه $a \neq 0$ باشد.

• معادلات شکل $ax^2 + c = 0$ و $ax^2 + bx = 0$ را به نام معادلات درجه دوم ناقص یاد می کنند.

• حل های معادلات $ax^2 + bx = 0$ عبارت از $x_1 = 0$ ، $x_2 = -\frac{b}{a}$ است.

• حاصل جمع جذرها از رابطه $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب جذور از رابطه $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ به دست می آید.

• به صورت عمومی حل های هر معادله درجه دوم توسط فرمول $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می آید که $\Delta = b^2 - 4ac$ است.

• هرگاه $\Delta > 0$ باشد معادله دو حل حقیقی مختلف دارد.

• هرگاه $\Delta = 0$ باشد معادله دو حل مساوی دارد.

• هرگاه $\Delta < 0$ باشد معادله در ست اعداد حقیقی حل ندارد.

• جهت تشکیل معادلات درجه دوم از رابطه $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0$ یا $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ استفاده می گردد.

تمرین فصل هفتم

• در سؤالات زیر به هر سؤال چهار جواب داده شده، جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- در معادله $4x = 3x^2 - 1$ ضرایب a, b, c عبارت از:

الف) $a = 3, b = 4, c = 1$ ب) $a = -3, b = 4, c = 1$

ج) $a = 4, b = 3, c = -1$ د) هیچ کدام

2- حل های معادله $3x^2 - 8x + 5 = 0$ عبارتند از:

الف) $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{3}$ ب) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 1$

ج) الف و ب د) هیچ کدام

3- حاصل جمع جذور معادله $x^2 - 10x + 16 = 0$ مساوی است به:

الف) $x_1 + x_2 = 5$ ب) $x_1 + x_2 = -5$

ج) $x_1 + x_2 = 8$ د) $x_1 + x_2 = 10$

4- اگر $\Delta > 0$ باشد:

الف) دو حل مساوی دارد. ب) معادله دو حل حقیقی و مختلف دارد.

ج) حل ندارد. د) یک حل دارد.

• جاهای خالی را پر کنید.

1- شکل عمومی معادلات یک مجهوله درجه دوم است.

2- $-\frac{b}{a}$ حاصل و $\frac{c}{a}$ حاصل است.

3- اگر باشد معادله درجه دوم حل ندارد.

4- اگر درجه یک معادله برابر دو باشد معادله دارد.

• سؤالات های زیر را بخوانید به مقابل سؤالات صحیح آن حرف (ص) و در مقابل سؤالات غلط آن حرف (غ) بگذارید.

1- () اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد معادله در ست اعداد حقیقی حل ندارد.

2- () فورمول محمد بن موسی $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ است.

3- () برای تشکیل معادلات درجه دو از رابطه های $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2$ و $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ استفاده می گردد.

4- () معادلاتی که یک مجهول داشته باشند و درجه مجهول (متحول) آن مساوی به 2 باشد به نام معادلات یک مجهوله درجه دوم یاد می شوند.

• سؤالات زیر را حل کنید.

1- در معادلات زیر ضرایب a, b, c را نشان دهید و بگویید که کدام آنها معادله کامل و کدام آنها ناقص است:

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $3x^2 - 1 = 0$ c) $2x^2 - 6x = 0$

2- معادلات زیر را توسط تکمیل مربع حل کنید:

a) $4x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $x^2 + \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$
 c) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ d) $x^2 + 3x = 0$

3- با استفاده از فورمول عمومی معادلات درجه دوم حلهای معادلات زیر را دریابید.

a) $7x^2 - 8x + 1 = 0$ b) $x^2 - 3x + 2 = 0$
 c) $t^2 - 0.27 + 0.6t = 0$

4- جذرها یا حل های معادلات درجه دوم در زیر داده شده اند معادله آن را بنویسید.

a) $-2, 0.5$ b) $3, -1$ c) $0, 2$ d) $\sqrt{2} - 1, 2$