



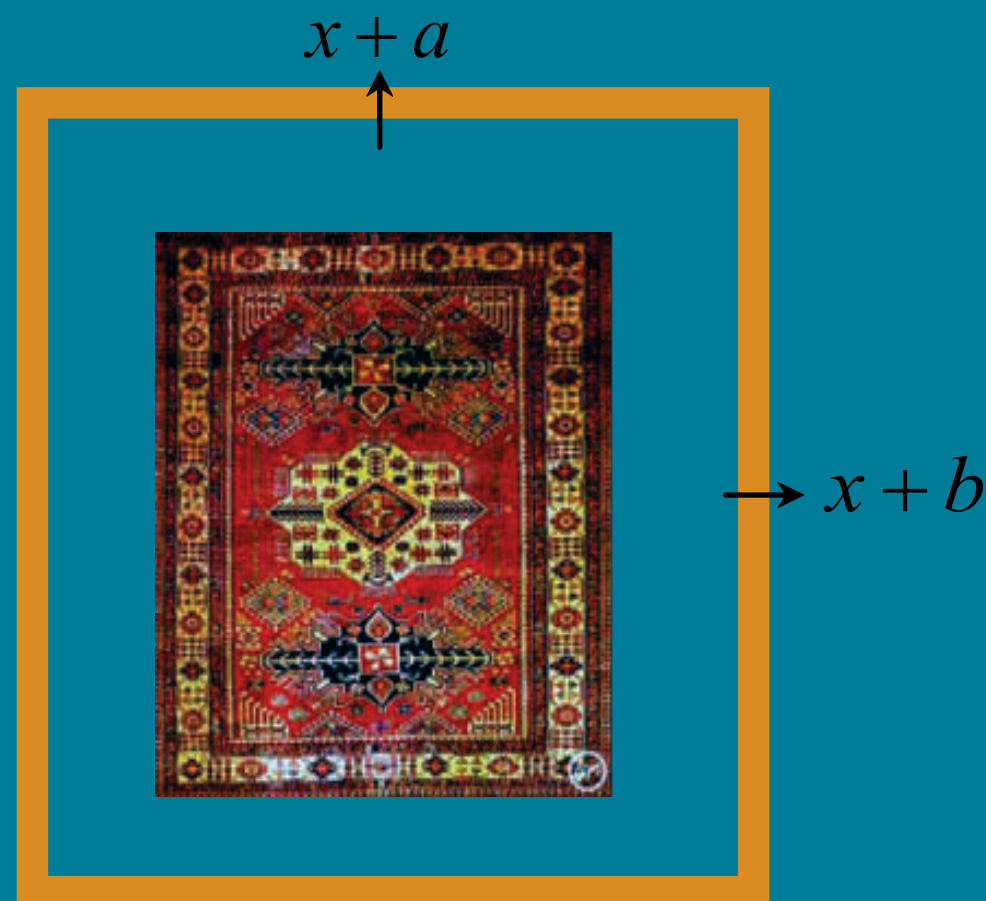
جمهوری اسلامی افغانستان
وزارت معارف
ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی

ریاضی

صنف دوازدهم

برای مدارس دینی

ریاضی صنف دوازدهم (برای مدارس دینی)



$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + a \cdot b$$

کتاب‌های درسی متعلق به وزارت معارف بوده،
خرید و فروش آن ممنوع است.

curriculum@moe.gov.af

ریاضی
صنف دوازدهم
(برای مدارس دینی)

۱۳۹۸ هـ . ش.

مؤلفان

- سرمؤلف میرنقیب الله عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- حمدالله شیرزی عضو پروژه انکشاف نصاب تعلیمی.
- محمد داؤد غیرت عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- معاون مؤلف لینا صافی عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ایدیت علمی

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی
- سرمؤلف عبدالکبیر عضو علمی ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

ایدیت زبان

- معاون مؤلف فرزانه شریف عضو علمی دیپارتمنت دری

کمیته دینی، سیاسی و فرهنگی:

- حبیب الله راحل مشاور وزارت معارف در ریاست انکشاف نصاب تعلیمی و تألیف کتب درسی

اشراف:

- دکتور شیر علی ظریفی رئیس پروژه انکشاف نصاب تعلیمی.



الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على رسوله محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين، أما بعد:

نصاب تعلیمی معارف اساس نظام تعلیم و تربیه را تشکیل داده و در رشد و توسعه علمی، فکری و سلوکی نسلهای امروز و فردای کشور نقش بنیادی و سرنوشت ساز دارد.

نصاب تعلیمی با گذشت زمان و تحول و پیشرفت در عرصه های مختلف زندگی، مطابق با نیازهای جامعه، باید هم از نظر مضمون و محتوا و هم از نظر شیوه و روش عرضه معلومات، تطور و انکشاف نماید.

یکی از عرصه های نصاب تعلیمی که مورد توجه جدی برای تجدید نظر و بهبود می باشد، نصاب تعلیمات اسلامی است؛ زیرا از یک جانب، فارغان مدارس دینی به حیث پیشوایان معنوی جامعه، باید محور تلاشهای معارف قرار گیرند و از سوی دیگر نصاب تعلیمات اسلامی شامل عقاید، احکام و هدایات دین مبین اسلام است که به حیث نظام و قانون مکمل، تمام ابعاد زندگی انسان ها را در بر گرفته و به عنوان آخرین پیام خالق و پروردگار جهان تا روز قیامت، رسالت رهنمایی و هدایت بشریت را انجام می دهد.

علمای امت اسلامی در طول تاریخ نقش مهمی را در ایجاد، توسعه و غنامندی سیستم تعلیمات و معارف اسلامی مخصوصاً انکشاف تدریجی نصاب تعلیمی مراکز و مؤسسات علمی جهان اسلام، ایفاء کرده اند. مطالعه دقیق در سیر تطور تاریخی علوم و معارف اسلامی در جهان نشان می دهد که نصاب تعلیمی مدارس و مراکز علمی ما، همواره بنا بر ضرورت های جامعه و در تطابق با احکام ثابت و پا بر جای دین اسلام، که برای همه انسانها در همه زمانها و مکانها می باشد، توسعه یافته است.

کشور عزیز ما افغانستان با سابقه درخشان علمی، روزگاری مهد علم و دانش و جایگاه بزرگترین مراکز علمی عصر بوده و در شکل گیری تمدن بزرگ اسلامی نقش عظیمی داشته است، وجود هزاران دانشمند و عالم در عرصه های مختلف علم و فرهنگ مخصوصاً در علوم شرعی مانند عقاید، تفسیر، حدیث، فقه، اصول فقه و غیره، گواه واضح آنچه گفته شد می باشد.

همزمان با رشد بیداری اسلامی در عصر حاضر، تعلیمات اسلامی در کشور ما شاهد تحول کمی و کیفی بوده و اطفال و جوانان کشور ما با شوق و رغبت فراوان به طرف مدارس و مراکز تعلیمات اسلامی رو می آورند. وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان بر اساس مسؤولیت و رسالت خویش، در مطابقت با احکام قانون اساسی کشور، به منظور رشد و توسعه کمی و کیفی تعلیمات اسلامی و از جمله نصاب آن، اقدامات قابل توجه نموده است.

درین راستا وزارت معارف با دعوت از علماء، استادان و متخصصین باتجربه و قابل اعتماد کشور، به بهبود و انکشاف نصاب تعلیمی پرداخته و کتابهای رایج مدارس تعلیمات اسلامی، را با شرح و توضیح متون، جا بجا ساختن فعالیتها، ارزیابی و تمرینها با معیارهای کتب درسی عیار ساخت.

امیدوارم این تلاشهای قابل تمجید علماء و متخصصان وزارت معارف، در بهبود و انکشاف هر چه بیشتر تعلیمات اسلامی در افغانستان عزیز مفید واقع شده و سبب کسب رضای خداوند متعال قرار گیرد.

وبالله التوفیق

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

مقدمه

استادان عالقدر و شاگردان گرامی،

ریاضی زبان علوم طبیعی است که قوانین طبیعت را فورمول بندی می کند و مسائل مربوط به اعداد و مقادیر را به زبان حساب ارایه می نماید.

انسان ها در زنده گی روز مره به علم ریاضی احتیاج دارند، این علم برای ساینس حیثیت کلید را دارد که اکثر قوانین طبیعت به زبان ریاضی بیان می شود و در مسائل شرعی نیز به علم ریاضی ضرورت می باشد، در تقسیم میراث، تقسیم زمین و دریافت مساحت آن، تعیین حقوق شرکاء و غیره موارد، از علم ریاضی استفاده صورت می گیرد.

برای اینکه فارغان مدارس علوم شرعی قابلیت های ضروری داشته باشند، مسائل روزمره زنده گی مربوط ریاضی را حل کرده بتوانند و مسائل مانند میراث، مشارکت، تقسیمات اموال و محتوای مضامین ساینسی را بفهمند، ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان مسائل ضروری ریاضی را در نصاب تعلیمی مدارس جابه جا نمود.

به گونه که ضرورت های اساسی شاگردان مدارس شرعی، تخصص آینده ایشان و ساعات تعیین شده در پلان تعلیمی برای مضمون ریاضی را در نظر گرفته و مسایل ضروری این علم را با در نظر داشت به فن معاصر نصاب نویسی بر میتود آسان و مؤثر تالیف نمود، تا فارغان مدارس شرعی در پهلوی علوم دینی بعضی علوم ضروری دنیوی را نیز فرا گیرند، ظرفیت های شان بلند برود و رول مؤثر و مثمر را در جامعه بازی نمایند.

و الله ولی التوفیق

فصل اول: خصوصیات بعضی عناصر دایره

- خصوصیات وتر دایره ۳
- خصوصیات شعاع دایره ۵
- روابط طولی در دایره ۷
- خصوصیات چهار ضلعی مرسوم به دایره ۹
- نکات مهم فصل اول ۱۱
- تمرینات فصل اول ۱۲

فصل دوم: هندسه تحلیلی

- مختصات نقطه وسطی یک قطعه خط ۱۵
- میل مستقیم های موازی ۱۷
- شکل عمومی معادله خط مستقیم ۲۱
- سیستم معادلات خطی ۲۳
- حل سیستم معادلات خطی به روش تعویضی ۲۷
- حل سیستم معادلات خطی به روش افنا ۲۹
- نکات مهم فصل دوم ۳۱
- تمرینات فصل دوم ۳۲

فصل سوم: مثلثات

- نسبت های مثلثاتی یک زاویه ۳۵
- نسبت های مثلثاتی زوایای معلوم ۳۷
- جدول مثلثاتی و استعمال آن ۳۹
- حل مثلث های قائم الزاویه ۴۷
- زوایای میل، ارتفاع و تنزیل ۴۹
- معادلات مثلثاتی ۵۱
- نکات مهم فصل سوم ۵۳
- تمرینات فصل سوم ۵۴

فصل چهارم: افاده های الجبری

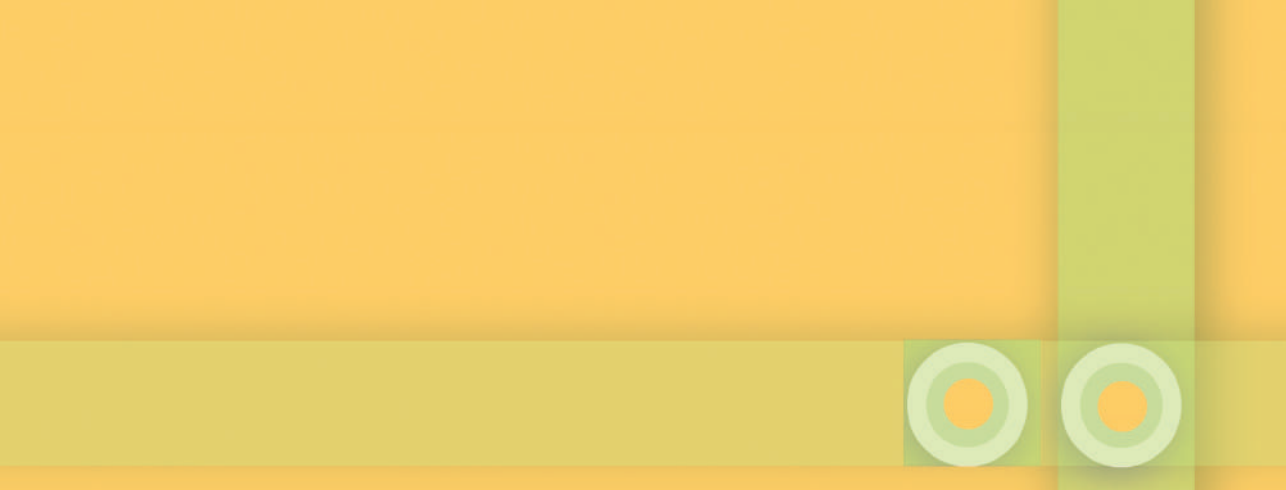
- تجزیه به فکتورها (فکتورگیری) ۵۷
- کوچکترین مضرب مشترک (L.C.M) ۵۹
- ساده کردن افاده های الجبری ۶۱
- نکات مهم فصل چهارم ۶۵
- تمرینات فصل چهارم ۶۶

فصل پنجم: نامساوات

- تحلیل تعیین اشاره افاده کسری ۶۹
- نامساوی های کسری ۷۱
- نامساوات خطی دو متحوله ۷۳
- سیستم نامساوی های خطی دو متحوله ۷۵
- نکات مهم فصل پنجم ۷۷
- تمرینات فصل پنجم ۷۸

فصل ششم: معادلات یک مجهوله درجه دوم

- شکل عمومی معادله یک مجهوله درجه دوم ۸۱
- طریقه حل معادله یک مجهوله درجه دوم که ضریب x در آن صفر باشد ۸۳
- طریقه حل معادله یک مجهوله درجه دوم که حد ثابت آن صفر باشد ۸۵
- حل معادله یک مجهوله درجه دوم که ضریب x و حد ثابت آن موجود باشد ۸۷
- حل معادلات یک مجهوله درجه دوم که دارای جذرهای مضاعف (مساوی) باشند ۸۹
- نکات مهم فصل ششم ۹۱
- تمرینات فصل ششم ۹۲



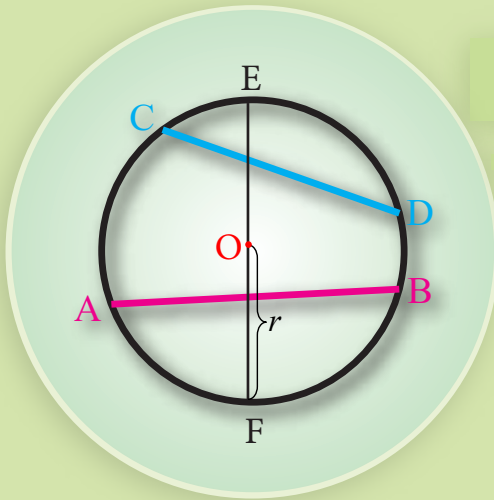
فصل اول

خصوصیات بعضی

عناصر دایره



خصوصیات وتر دایره



در شکل مقابل توجه نمایید آیا گفته می‌توانید که خطوط $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ و $\overline{EF}$ را به نام چه یاد میکنند. خصوصیت مستقیم $\overline{EF}$ چیست و با $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ چه ارتباط دارد؟

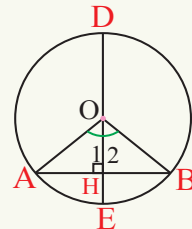
فعالیت

در دایره $C(O, r)$ وتر $\overline{AB}$ را رسم کنید. قطر $\overline{ED}$ دایره را طوری رسم نمایید که مثلی بر وتر $\overline{AB}$ در نقطه H عمود باشد. نقطه (O) را به A و B وصل نمایید شکلی که به دست می‌آید چه نوع مثلث است؟ در جاهای خالی علامت مناسب ($>$ ، $<$ ، $=$) را بگذارید.

$$\overline{OA} \square \overline{OB} \quad , \quad \widehat{AE} \square \widehat{EB} \quad , \quad \overline{AH} \square \overline{HB}$$

از نتیجه این فعالیت می‌توانیم به گونه زیر قضیه را بیان و ثبوت نماییم.
قضیه: در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و قوس‌های مقابل آنها را تنصیف می‌کند.
ثبوت: از دو مثلث $\triangle AOH_1$ و $\triangle BOH_2$ می‌توانیم بنویسیم که:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} \dots\dots\dots \text{شعاع دایره} \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} \dots\dots\dots \text{قایمه} \\ \overline{OH} = \overline{OH} \dots\dots\dots \text{مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOH \cong \triangle BOH$$



بنابر آن از تساوی دو مثلث چنین نتیجه به دست می‌آید که $\overline{AH} = \overline{HB}$
چون زاویه‌های مرکزی $\triangle AOH_1$ و $\triangle BOH_2$ با هم مساوی بوده در نتیجه $\widehat{AE} = \widehat{EB}$ است.
مثال: دایره $C(O, 5)$ داده شده است، اگر فاصله عمودی وتر $\overline{AB}$ از مرکز دایره 10 واحد باشد طول وتر $\overline{AB}$ را محاسبه کنید.

حل: در مثلث $\triangle OHA$ نظر به قضیه فیثاغورث داریم که:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$

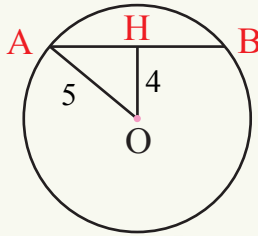
$$5^2 = \overline{AH}^2 + 4^2$$

$$\overline{AH}^2 = 5^2 - 4^2$$

$$\overline{AH}^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\overline{AH} = 3$$

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 3 = 6 \text{ unit}$$



فعالیت

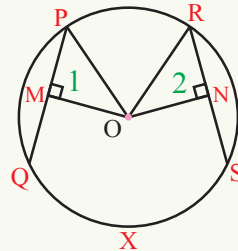
- دایره $C(O, 3)$ را ترسیم نمایید.
- در دایره دو وتر مساوی $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ را رسم نمایید.
- از مرکز دایره بالای $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ عمودها را رسم نموده طول آنها را اندازه کنید.

از نتیجه این فعالیت قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم.

قضیه: وترهای مساوی، از مرکز دایره هم فاصله‌اند.

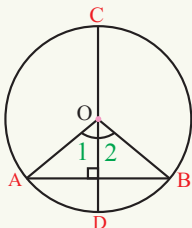
ثبوت: از دو مثلث $\triangle POM$ و $\triangle RON$ داریم که:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OP} = \overline{OR} \quad \text{شعاع دایره} \\ \hat{1} = \hat{2} \quad \text{قایمه} \\ \overline{PQ} = \overline{RS} \quad \text{وترهای مساوی} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \triangle POM \cong \triangle RON \\ \overline{OM} = \overline{ON} \end{array}$$



در نتیجه گفته می‌توانیم که در هر دایره، وترهای مساوی از مرکز هم فاصله‌اند.

تمرین

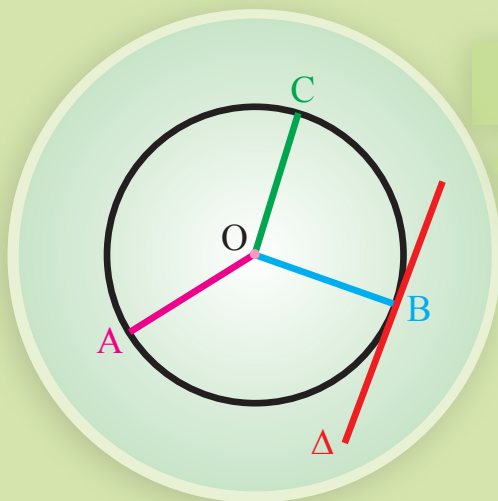


1- در دایره $C(O, 13)$ وتر $\overline{AB}$ از مرکز دایره به فاصله پنج واحد قرار دارد، طول $\overline{AB}$ را دریابید.

2- ثبوت کنید، در هر دایره قطری که از وسط وتر بگذرد، بالای آن وتر عمود است.

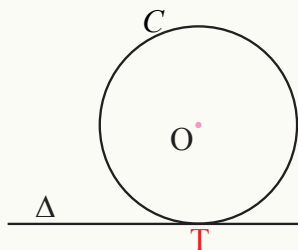
3- در یک دایره وتر $\overline{AB} = 8\text{cm}$ را رسم نموده اگر فاصله عمودی این وتر از مرکز دایره $\overline{OH} = 3\text{cm}$ باشد طول قطر و محیط دایره را محاسبه نمایید.

خصوصیت شعاع دایره



آیا گفته می‌توانید که خطوط OC ، OB و OA به نام چه یاد می‌شوند؟
ارتباط خط Δ با دایره O و شعاع OB چیست؟

فعالیت



- در شکل مقابل خط مستقیم Δ به دایره $C(O, r)$ در نقطه T مماس است.
- بالای مماس نقاط A, B, C و D را به دو طرف نقطه T انتخاب و آن‌ها را به مرکز دایره وصل نمایید.
- قطعه خط‌های تشکیل شده را توسط خط کش اندازه نمایید.
- کوتاه‌ترین فاصله بین مرکز دایره و مماس Δ را نشان دهید.
- کوتاه‌ترین فاصله بین یک نقطه و یک مستقیم کدام فاصله است؟
- از دو فقره اخیر چه نتیجه می‌گیرید؟

از نتیجه این فعالیت می‌توانیم قضیه زیر را بیان و ثبوت نماییم.
قضیه: شعاع دایره در نقطه تماس بالای مماس عمود است.

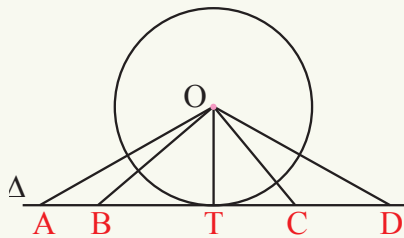
ثبوت: در شکل زیر دیده می‌شود که:

$$OT < OB < OA$$

$$OT < OC < OD$$

می‌دانیم که کوتاه‌ترین فاصله بین یک نقطه و یک خط مستقیم فاصله عمودی است.

در نتیجه گفته می‌توانیم که: $OT \perp \Delta$ است.



مثال 1: در شکل زیر خط مستقیم Δ در نقطه A به دایره $C(O, r)$ مماس است. اگر زاویه AOB مساوی به 60° باشد، اندازه زاویه x را دریابید.

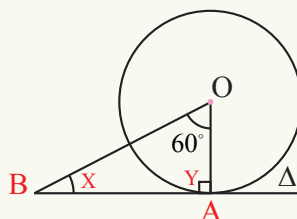
$$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$$

$$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$$

$$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{x} = 180^\circ - 150^\circ$$

$$\hat{x} = 30^\circ$$



مثال 2: در شکل زیر خط مستقیم Δ به دایره $C(O, r)$ مماس است، اگر طول $OM=4\text{unit}$ و $ON=5\text{unit}$ باشد طول MN را دریابید.

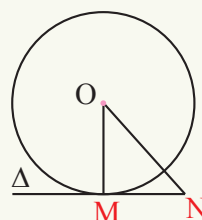
حل: می دانیم شعاع دایره در نقطه تماس بالایی مماس عمود است در نتیجه در مثلث قائم الزاویه OMN با استفاده از قضیه فیثاغورث می توانیم بنویسیم که:

$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$$

$$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$$

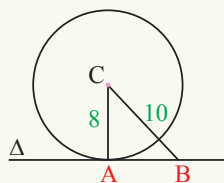
$$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\overline{MN} = 3\text{unit}$$

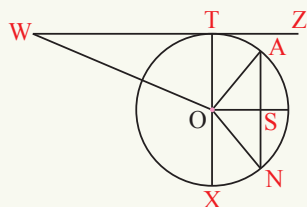


شعاع دایره در نقطه تماس بالایی مماس عمود است.
هر مماس در نقطه تماس بالایی شعاعی که از نقطه تماس می گذرد، عمود است.

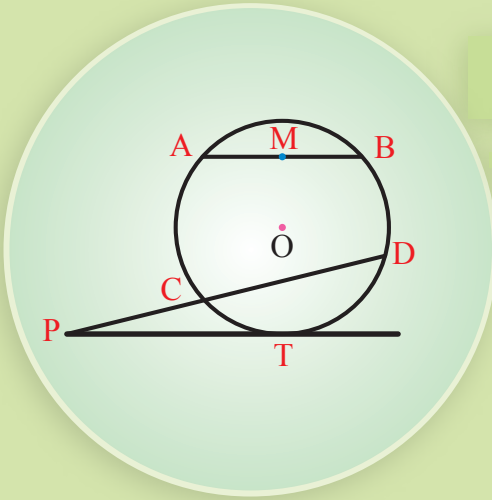
تمرین



1- در شکل مقابل Δ بالای دایره $P(c, r)$ مماس است اگر $AC=8\text{unit}$ و $BC=10\text{unit}$ طول داشته باشد AB را دریابید.



2- در شکل مقابل اگر WZ در نقطه T به دایره $C(O, r)$ مماس باشد و اگر $OS=1\text{unit}$ ، $TW=3\text{unit}$ و $OT=2\text{unit}$ باشد طول قطعه خط های OW, SN, AS, OA و TX را دریابید.



آیا می‌توانید قطعه خط‌هایی را که در شکل می‌بینید نام بگیرید؟

تعریف

روابط طولی: روابطی که بین اندازه‌های اجزای خطی یک شکل هندسی موجود است، روابط طولی نامیده می‌شود.

فعالیت

کمک:

- هرگاه در دو مثلث، دو زاویه مثلث با هم مساوی باشند زاویه سوم آن لزوماً با هم مساوی می‌شود.
- در مثلث‌های متشابه اضلاع مقابل زاویه‌های مساوی، متناسب‌اند.

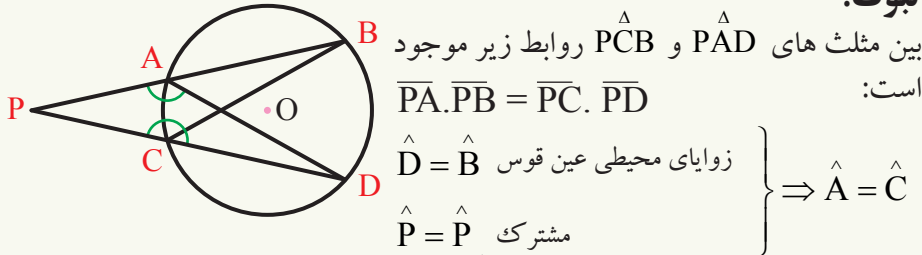
- از نقطه P خارج دایره C(O,r) قاطع PAB و PCD را رسم نمایید.
- نقطه A را به D و B را به C وصل نمایید.
- مثلث PAD و PCB را روی شکل نشان دهید و بگویید که آیا آن‌ها متشابه‌اند؟
- نسبت‌های تشابه را در دو مثلث فوق بنویسید.

از نتیجه این فعالیت قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می‌نماییم.

قضیه: هرگاه از یک نقطه خارجی بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد، حاصل ضرب هر دو قاطع با قطعات خارجی آنها باهم مساوی اند. یعنی:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

ثبوت:



از تساوی سه زاویه فوق می توانیم بنویسیم که مثلث های $\triangle PCB$ و $\triangle PAD$ باهم مشابه اند، لذا می توانیم بنویسیم که:

$$\triangle PCB \sim \triangle PAD \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

مثال: در شکل زیر PA و PB دو قاطع دایره $C(O, r)$ اند، اگر طول $PA = 10 \text{ cm}$, $PC = 6 \text{ cm}$ و $PD = 4 \text{ cm}$ باشد طول های PB و DB را دریابید.

حل: نظر به طول قطعاتی که از نقطه P رسم شده اند و با استفاده از قضیه قبلی می توانیم بنویسیم که:

$$PA \cdot PC = PB \cdot PD$$

$$10 \times 6 = PB \cdot 4$$

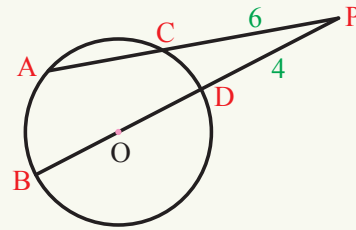
$$60 = 4PB$$

$$PB = 15 \text{ cm}$$

$$DB = PB - PD$$

$$DB = 15 - 4$$

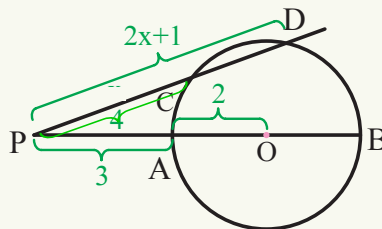
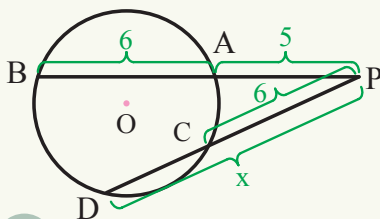
$$DB = 11 \text{ cm}$$



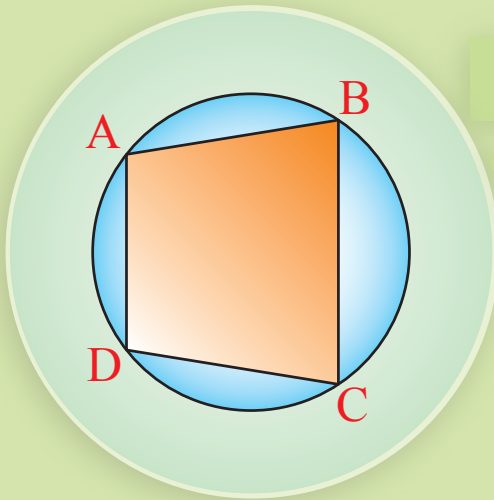
از حل مثال حقانیت قضیه فوق به اثبات میرسد؛ یعنی: اگر از یک نقطه خارجی بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد حاصل ضرب هر دو قاطع با قطعات خارجی آنها باهم مساوی اند.

تمرین

در اشکال زیر قیمت عددی x را دریافت کنید.



خصوصیت های چهار ضلعی مرسوم به دایره



در شکل مقابل، آیا گفته می‌توانید که
بین دایره و رأس های چهار ضلعی
چه رابطه ای وجود دارد؟

فعالیت

- چهار ضلعی ABCD و یک دایره را طوری رسم کنید که محیط دایره از رأسهای چهار ضلعی عبور نماید.
- زوایایی که رأس های آنها بالای محیط دایره قرار دارند به نام چی یاد می شوند؟
- مرکز دایره را به دو رأس چهار ضلعی وصل نمایید زاویه مرکزی یی که به دست می آید چند درجه است؟
- روابط زوایای مرکزی و محیطی را که مقابل عین قوس قرار دارند بنویسید.

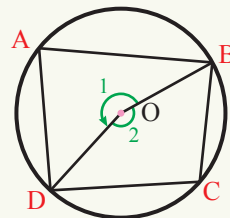
از نتیجه این فعالیت قضیه را طور زیر بیان و ثبوت می نماییم:
قضیه: مجموعه زوایای یک چهار ضلعی مرسوم به دایره 180° است.
ثبوت:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 360^\circ$$

$$\hat{DCB} = \frac{1}{2} \hat{O}_1$$

$$\hat{DAB} = \frac{1}{2} \hat{O}_2$$

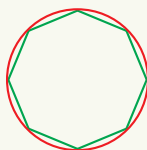
$$\hat{DCB} + \hat{DAB} = \frac{1}{2} (\hat{O}_1 + \hat{O}_2) = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



مضلع دو قسم است: مضلع منظم و مضلع غیر منظم

تعریف

مضلع که اضلاع و زوایای آن با هم مساوی باشد مضلع منظم نامیده می شود.



اگر تعداد اضلاع را به n و مجموع زوایای داخلی مضلع را به S_n نشان دهیم؛ پس مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی $S_n = (n - 2)(180^\circ)$ درجه است.

مثال: مجموع زوایای داخلی یک چهار ضلعی و یک (10) ضلعی را به دست آرید.

حل: مجموع زوایای داخلی هر مضلع از رابطه $S_n = (n - 2)(180^\circ)$ به دست می آید
لذا داریم که:

$$S_n = (n - 2)(180^\circ)$$

$$S_4 = (4 - 2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$

$$S_{10} = (10 - 2)(180^\circ) = 8 \times 180^\circ \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

به یاد داشته باشید:

- تعداد قطرهایی که از رأس یک n ضلعی رسم می گردد از رابطه $n - 3$ به دست می آید.
- تعداد مثلث هایی که در داخل مضلع از یک رأس تشکیل می شود از رابطه $n - 2$ به دست می آید.

- مجموع زوایای مقابل یک چهار ضلعی محاطی مرسوم به دایره 180° است.
- مضلعی که اضلاع و زوایای آن با هم مساوی باشد مضلع منظم نامیده می شود.

تمرین

- 1- اندازه زوایای یک شش ضلعی منظم چند درجه است؟
- 2- اندازه زوایای یک n ضلعی منظم چند درجه است؟
- 3- مثلث هایی که توسط اقطار از یک رأس در یک 10 ضلعی تشکیل می شوند چند است؟

نکات مهم فصل اول

- در هر دایره قطر عمود بر وتر، وتر و قوس های مقابل آنها را تنصیف می کند.
- وترهای مساوی از مرکز دایره هم فاصله اند.
- شعاع دایره در نقطه تماس بالای مماس عمود است.
- روابطی که بین اندازه های اجزای خطی یک شکل هندسی موجود است روابط طولی نامیده می شوند.
- هرگاه از یک نقطه خارجی بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد، حاصل ضرب هر دو قاطع با قطعات خارجی آنها باهم مساوی اند.
- مجموعه زوایای مقابل یک چهار ضلعی مرسوم به دایره 180° است.
- مضلعی که اضلاع و زوایای آن باهم مساوی باشد مضلع منظم نامیده می شود.
- تعداد قطرهایی که از یک رأس n ضلعی رسم میگردد از رابطه $n-3$ به دست می آید.
- تعداد مثلث هایی که ذریعه ترسیم قطرهای مضلع، از یک رأس تشکیل می شوند از رابطه $n-2$ به دست می آید.

تمرینات فصل اول

● در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- خط مستقیم که با دایره یک نقطهٔ مشترک داشته باشد به نام:

- (a) وتر دایره یاد می شود. (b) مماس دایره یاد می شود.
(c) قوس دایره یاد می شود. (d) محیط دایره یاد می شود.

2- وتری که به مرکز دایره نزدیکتر است، در مقایسه به وترهایی که از مرکز دایره دورتراند:

- (a) طولیتر است. (b) کوتاه تر است است.
(c) مساوی است. (d) هر سه جواب درست است.

3- اگر یک خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع کند آن را:

- (a) عمود به دایره گویند. (b) مماس به دایره گویند.
(c) قاطع به دایره گویند. (d) موازی به دایره گویند.

● جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- بزرگترین وتر دایره است.

2- در هر دایره قطر بر هر وتر، وتر را تنصیف و قوس های از آن جدا می کنند.

3- در هر مثلث قائم الزاویه وتر مساوی به مجموعهٔ مربعات اضلاع است.

4- در هر دایره وتری که به مرکز نزدیک تر است می باشد.



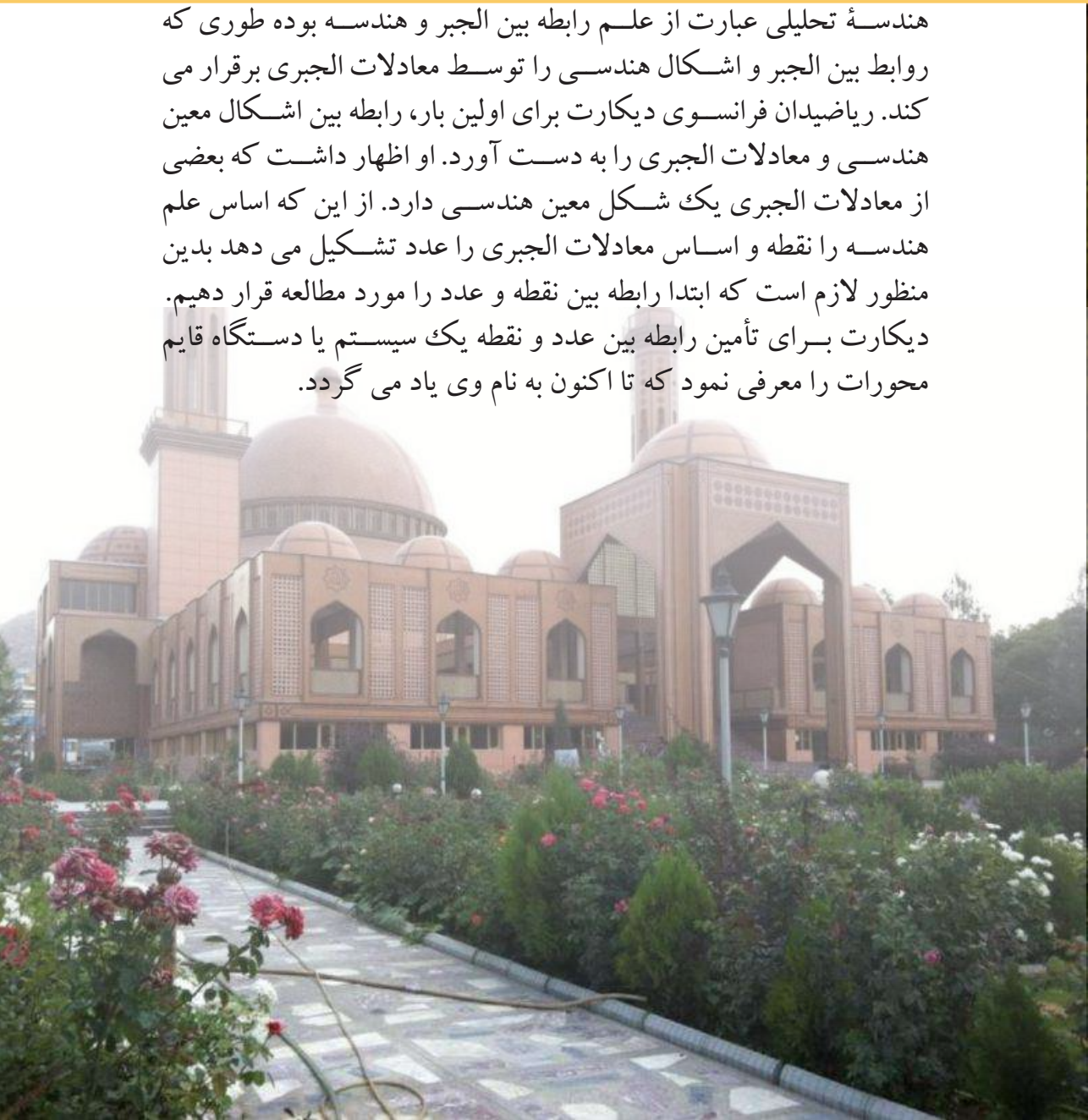
فصل دوم

هندسة تحليلی

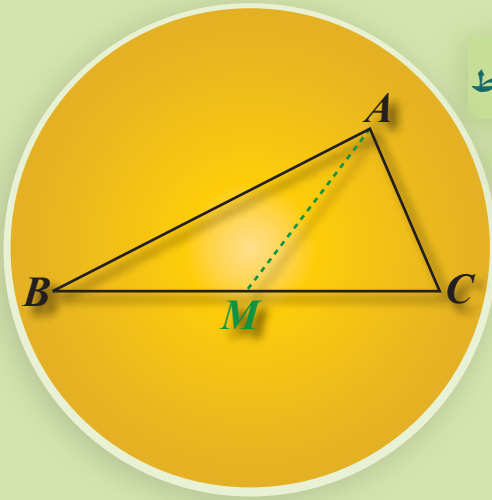
هندسه تحلیلی

Analytic Geometry

هندسه تحلیلی عبارت از علم رابطه بین الجبر و هندسه بوده طوری که روابط بین الجبر و اشکال هندسی را توسط معادلات الجبری برقرار می کند. ریاضیدان فرانسوی دیکارت برای اولین بار، رابطه بین اشکال معین هندسی و معادلات الجبری را به دست آورد. او اظهار داشت که بعضی از معادلات الجبری یک شکل معین هندسی دارد. از این که اساس علم هندسه را نقطه و اساس معادلات الجبری را عدد تشکیل می دهد بدین منظور لازم است که ابتدا رابطه بین نقطه و عدد را مورد مطالعه قرار دهیم. دیکارت برای تأمین رابطه بین عدد و نقطه یک سیستم یا دستگاه قایم محورات را معرفی نمود که تا اکنون به نام وی یاد می گردد.



مختصات نقطه وسطی یک قطعه خط



در مثلث $\triangle ABC$ قطعه خط $\overline{AM}$ میانه است، آیا میتوانید مشخصات میانه را بیان کنید؟

فعالیت

- نقاط $D(2,0)$ و $E(6,0)$ را روی کمیات وضعیه تعیین کنید.
- اگر نقطه C وسط قطعه خط $\overline{DE}$ باشد مختصات آن را بنویسید.
- مختصات نقطه C چه رابطه‌یی با مختصات نقاط D و E دارد؟
- نقاط $P(0,1)$ و $Q(0,4)$ را روی کمیات وضعیه تعیین نمایید.
- اگر نقطه R وسط قطعه خط $\overline{PQ}$ باشد مختصات آن را به دست آرید.
- مختصات نقطه R چه رابطه‌یی با مختصات نقاط P و Q دارد؟

نتیجه فعالیت فوق را می‌توان به حالت کلی طور زیر بیان کرد:

اگر دو نقطه $A(x_1, 0)$ و $B(x_2, 0)$ بالای محور X قرار داشته باشد، مختصات نقطه M

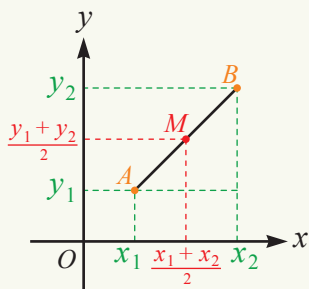
وسط $\overline{AB}$ از رابطه $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ به دست می‌آید. اگر دو نقطه $P(0, y_1)$ و $Q(0, y_2)$ بالای محور Y قرار داشته باشند مختصات نقطه M وسط $\overline{PQ}$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

به صورت عموم اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دونقطه در کمیات وضعیه و M نقطه وسطی

قطعه خط $\overline{AB}$ باشد، آنگاه مختصات نقطه M طور زیر به دست می‌آید.

$$M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$



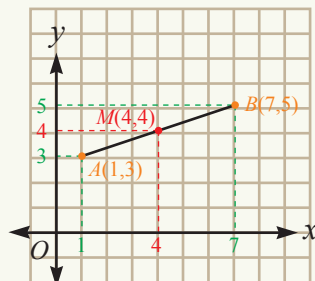
مثال 1: اگر $A(1,3)$ و $B(7,5)$ مختصات آغاز و انجام قطعه خط $\overline{AB}$ باشد مختصات نقطه وسطی $\overline{AB}$ را به دست آورید:

حل: با استفاده از مختصات نقطه وسطی یک قطعه خط می توانیم بنویسیم که:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$$

$$M(4,4)$$



مثال 2: فاصله نقطه $P(-1,3)$ را از نقطه وسطی مستقیمی که از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,-4)$ می گذرد به دست آرید.

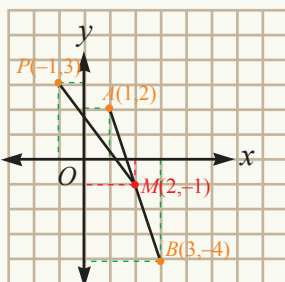
حل: برای دریافت فاصله بین نقطه P و قطعه خط $\overline{AB}$ ابتدا نقطه تنصیف قطعه خط $\overline{AB}$ را دریافت می کنیم و داریم که:

$$\begin{aligned} M_{\overline{AB}} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (2, -1) \Rightarrow M_{\overline{AB}} = (2, -1) \end{aligned}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$\overline{PM} = 5 \text{ unit}$$



تمرین

1- سه رأس مثلث $A(5,-2)$, $B(3,-1)$, $C(1,5)$ داده شده اند، طول میانه $\overline{AM}$ را دریابید.

2- اگر نقاط $A(2,4)$, $B(5,9)$, $C(14,9)$ و $D(11,4)$ رأس های یک متوازی الاضلاع باشند، مختصات نقاط تقاطع قطرهای متوازی الاضلاع را دریابید.

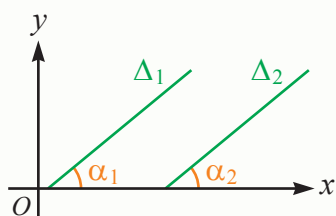
3- اگر $A(-1,4)$, $B(-3,-7)$ و $C(1,9)$ رأس های یک مثلث باشند طول میانه را که بالای ضلع $\overline{BC}$ رسم می گردد دریابید.



میل مستقیم های موازی

به شکل مقابل نگاه کنید آیا گفته می‌توانید که چه رابطه ای بین دو بازوی زینه موجود است؟

فعالیت

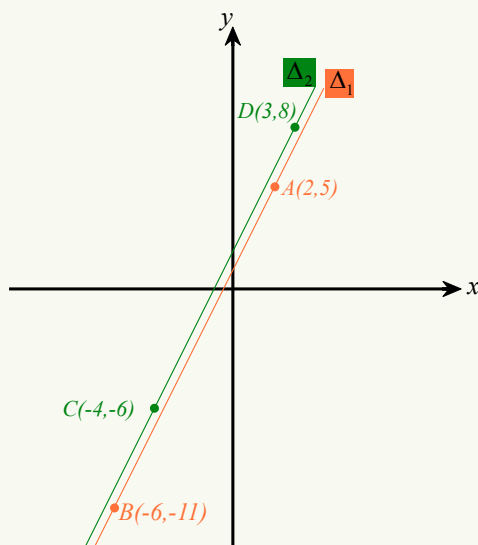


- در کمیات وضعیۀ مختصات قایم، دو خط مستقیم Δ_1 و Δ_2 را باهم موازی طوری رسم کنید که با جهت مثبت محور X زوایای حاده را بسازند.
- میل خطوط Δ_1 و Δ_2 را محاسبه کرده و باهم مقایسه کنید، ببینید که آنها با هم چه رابطه دارند؟
- اگر Δ_1 با جهت مثبت محور X زاویه α_1 و Δ_2 با جهت مثبت محور X زاویه α_2 را بسازد، آنگاه α_1 و α_2 با یکدیگر چه رابطه دارند؟

در حالت کلی نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم:

مستقیم‌های موازی دارای میل‌های مساوی می‌باشند.
اگر دو خط مستقیم میل‌های مساوی داشته باشند در نتیجه زوایایی که با جهت مثبت محور X می‌سازند نیز با هم مساوی‌اند.

مثال: اگر مستقیم Δ_1 از نقاط $A(2,5)$ و $B(-6,-11)$ و مستقیم Δ_2 از نقاط $C(-4,-6)$ و $D(3,8)$ بگذرد دریابید که خطوط Δ_1 و Δ_2 نسبت به هم چه رابطه ای دارند؟



حل: میل های مستقیم های Δ_1 و Δ_2 را محاسبه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\Delta_1} &= \frac{-11 - 5}{-6 - 2} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} &= \frac{6 + 8}{3 + 4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} = \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

چون میل های Δ_1 و Δ_2 باهم مساوی اند؛ بنا بر این خطوط با هم موازی اند.

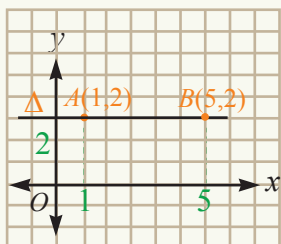
فعالیت

- نقاط $A(1,2)$ و $B(5,2)$ را در مستوی کمیات وضعیه مشخص کنید.
- مستقیمی که از نقاط A و B می گذرد ترسیم کرده آن را Δ بنامید.
- مستقیم Δ با جهت مثبت محور x چه نوع زاویه را می سازد؟
- میل مستقیم Δ را محاسبه کنید.

در حالت کلی نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم:

اگر نقاط کیفی A و B دارای ترتیب‌های مساوی باشند؛ مثلاً $A(x_1, a)$ ، $B(x_2, a)$ ، آنگاه مستقیمی که از نقاط A و B می‌گذرد موازی به محور X است و میل آن مساوی

$$m = \frac{a - a}{x_2 - x_1} = 0 \text{ به صفر است، یعنی:}$$



فعالیت

- نقاط $M(3, 2)$ و $N(3, 5)$ را در مستوی کمیات وضعیه مشخص کنید.
- مستقیمی را که از نقاط M و N می‌گذرد ترسیم کرده آن را Δ بنامید.
- مستقیم Δ با محور X چه نوع زاوی‌یی را می‌سازد. در مورد میل مستقیم Δ چه گفته می‌توانید؟

از فعالیت فوق به این نتیجه می‌رسیم:

میل مستقیمی را که با محور X زاویه قائمه می‌سازد نمی‌توانیم محاسبه کنیم. در این حالت می‌گوییم مستقیم Δ میل معین ندارد.

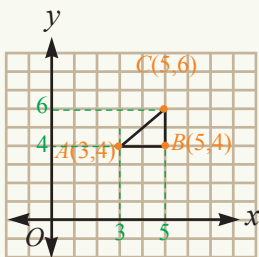
مثال: اگر نقاط $A(3, 4)$ ، $B(5, 4)$ و $C(5, 6)$ رأس‌های یک مثلث باشند، نوعیت مثلث را مشخص نموده در مختصات کمیات وضعیه آن را رسم نمایید.

حل: چون $\overline{AB}$ موازی به محور X است؛ بنا بر آن میل آن صفر است.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4 - 4}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

به همین ترتیب $\overline{BC}$ موازی به محور Y است؛ لذا میل آن نامعین است.

$$m_{\overline{BC}} = \frac{6 - 4}{5 - 5} = \frac{2}{0} = \infty \text{ تعریف نشده}$$



$$\overline{AB}^2 = (5-3)^2 + (4-4)^2 = 4$$

$$\overline{BC}^2 = (5-5)^2 + (6-4)^2 = 4$$

$$\overline{AC}^2 = (5-3)^2 + (6-4)^2 = 8$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

در نتیجه:

چون قضیه فیثاغورث در مثلث تطبیق گردید؛ پس $\overline{AB}$ عمود بر $\overline{BC}$ است؛ لذا مثلث $\triangle ABC$ قائم الزاویه می باشد.

میل هر خط مستقیم موازی با محور x صفر است.
میل هر خط مستقیم عمود بر محور x تعریف نشده است. (عدد نامعین است)

تمرین

1- اگر $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ و $D(0,-5)$ رأس های یک چهار ضلعی باشند.

الف: اضلاع مقابل چهار ضلعی باهم چه ارتباط دارند؟

ب: میل قطرهای آن را دریابید.

2- نقاط $A(3,4)$ ، $B(-3,4)$ ، $C(3,-4)$ و $D(-3,-4)$ را در نظر بگیرید.

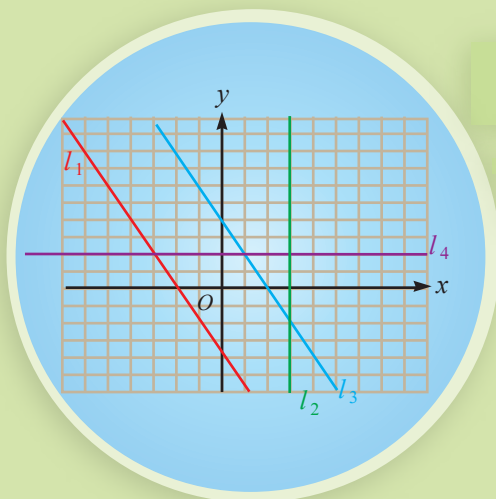
الف: مستقیمی که از نقاط A و B می گذرد چه رابطه یی با مستقیمی که از نقاط C و D می گذرد دارد؟

ب: مستقیمی که از نقاط A و C می گذرد چه رابطه یی با مستقیمی که از نقاط C و D می گذرد دارد؟

ج: چهار ضلعی $ABCD$ چه نوع چهار ضلعی است؟

د: میل قطرهای آن را پیدا کنید.

شکل عمومی معادله خط مستقیم



آیا گفته می‌توانید که چهار خط l_1 ، l_2 ، l_3 ، l_4 نسبت به همدیگر در کدام وضعیت قرار دارند؟

معادله الجبری یک خط مستقیم که رابطه بین مختصات هر نقطه را روی یک خط نشان می‌دهد دانستیم. حال شکل عمومی معادله خط را طور زیر بیان می‌نماییم:

معادله خط مستقیم در حالت استاندارد (معیاری) به شکل زیر است:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی و $b \neq 0$ است.

در معادله فوق $\frac{-a}{b}$ میل خط و $\frac{-c}{b}$ نقطه تقاطع با محور y را نشان می‌دهد.

به این ترتیب می‌توان گفت هر مستقیمی که در مستوی دارای معادله‌ای به شکل $y = mx + h$ باشد، در آن m میل خط مستقیم و h ترتیب نقطه تقاطع با محور y است.

در حالت عمومی هر رابطه خطی بر حسب x و y که در آن توان x و y یک باشد، معادله یک خط مستقیم می‌باشد.

فعالیت

- دو مستقیم $2x + 3y - 6 = 0$ و $y - x = 2$ را در یک سیستم کمیات وضعیه رسم کنید.
- میل هر یک از این خطوط را به دست آرید.
- این دو خط نظر به یکدیگر در کدام وضعیت قرار دارند؟

از فعالیت فوق می‌توان نتیجه را طور زیر بیان نمود که:

اگر میل دو خط با یکدیگر مساوی نباشند آن دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند.

در حالت معیاری اگر دو خط مستقیم $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ متقاطع باشند، میل آنها با هم مساوی نبوده و از آن نتیجه می شود که:

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \quad \text{یا} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

فعالیت

- دو خط مستقیم $6x - 2y + 1 = 0$ و $-3x + y - 5 = 0$ را در مختصات کمیات وضعیۀ قایم رسم کنید.
- میل هر یک از این خطوط را به دست آرید.
- این دو خط نظر به یکدیگر در چه وضعیتی قرار دارند؟ چرا؟

در حالت معیاری دو خط $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ وقتی موازی می باشند که میل های آنها مساوی باشد، از اینجا می توان نتیجه گرفت که بین ضرایب

متحولین آنها رابطه زیر برقرار است: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

اگر بین ضرایب و ثوابت رابطه $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ برقرار باشد، در این صورت خطوط منطبق اند.

مثال: خطوط مستقیم $3x + 4y = 5$ و $4x - 3y = -1$ باهم چه رابطه دارند؟

حل: با استفاده از ضرایب معادلات دو خط داریم که:

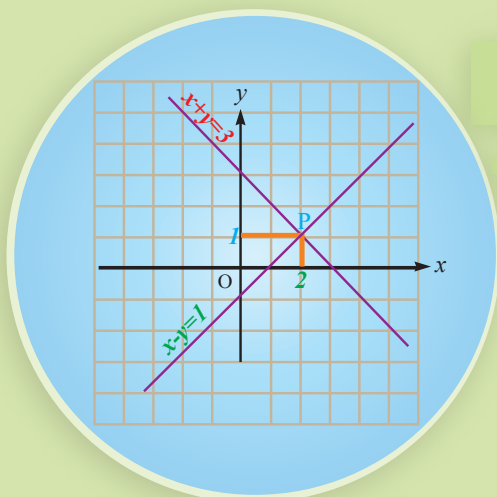
$$a_1 = 3 \quad b_1 = 4 \quad c_1 = -5$$

$$a_2 = 4 \quad b_2 = -3 \quad c_2 = 1$$

چون $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ یعنی $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{-3}$ است؛ پس این دو خط متقاطع اند.

تمرین

- 1- حالات خطوط $4x + 3y - 1 = 0$ و $8x + 6y + 5 = 0$ را معلوم کنید.
- 2- حالات خطوط $8x - 4y + 10 = 0$ و $4x - 2y + 5 = 0$ را دریافت کنید.
- 3- قیمت k را در معادلات $(k+1)x + ky = 0$ و $2x - 3y + 5 = 0$ طوری تعیین نمایید که خطوط با هم موازی باشند.



در شکل مقابل توجه نمایید، آیا گفته می‌توانید که مختصات نقطه P در هر دو معادله خطوط مستقیم، صدق می‌کند یا خیر؟

فعالیت

- میل خطوط $y = 4x - 2$ و $y = -3x + 5$ را به دست آرید.
- این دو خط نظر به یکدیگر چه رابطه دارند؟ چرا؟
- دو خط فوق را در یک مستوی کمیات وضعیه رسم کنید. چه رابطه بین خطوط رسم شده مشاهده می‌شود؟

در فعالیت فوق به مشاهده می‌رسد که اگر میل این دو خط با هم مساوی نباشند همدیگر را در یک نقطه مانند P قطع می‌کنند، چون نقطه تقاطع بالای هر دو خط واقع است؛ پس مختصات نقطه تقاطع در هر دو معادله صدق می‌کند، اگر مختصات نقطه تقاطع $P(x, y)$ باشد، آنگاه داریم که:

$$y = -3x + 5 \quad \text{و} \quad y = 4x - 2$$

در نتیجه:

$$4x - 2 = -3x + 5$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

با وضع کردن قیمت X در معادلات فوق قیمت Y را به دست می‌آوریم.

$$y = 4x - 2 \Rightarrow y = 4(1) - 2 \Rightarrow y = 2$$

پس مختصات نقطه تقاطع عبارت از $P(1,2)$ است در این حالت می‌گوییم $P(1,2)$ نقطه‌یی است که هر دو معادله خط‌ها را صدق می‌کند که حل سیستم معادلات خطی می‌باشد.

$$\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$$

فعالیت

- سیستم معادلات خطی مقابل را مد نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \dots\dots I$$
- در این سیستم a_1, b_1, c_1 و a_2, b_2, c_2 را به نام چه یاد می‌کنند؟
- در معادلات فوق x و y را چه می‌گویند؟
- آیا نقطه تقاطع خطوط، حل سیستم معادلات شده می‌تواند؟

برای حل سیستم معادلات خطی، رابطه (I) را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم، در صورتی که b_1 و b_2 خلاف صفر باشند.

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

پس سه حالت زیر را داریم:

- 1- اگر میل‌های خطوط مساوی نباشند در آنصورت دو خط یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.
- 2- اگر میل‌های خطوط مساوی، ولی تقاطع آنها با محور y در نقاط مختلف باشد در آنصورت خطوط باهم موازی اند.
- 3- اگر میل‌های خطوط و تقاطع آنها با محور y باهم مساوی باشد، در آنصورت خطوط منطبق اند.

مثال 1: سیستم معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

حل: برای حل، سیستم معادلات را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y = 7 - x \Rightarrow y = -x + 7 \\ y = 5 - 2x \Rightarrow y = -2x + 5 \end{cases}$$

در معادلات اخیر میل دو خط فوق 1- و 2- است از اینکه میل دو خط مساوی نیستند پس دو خط یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند. برای دریافت مختصات نقطه تقاطع طور زیر عمل می کنیم:

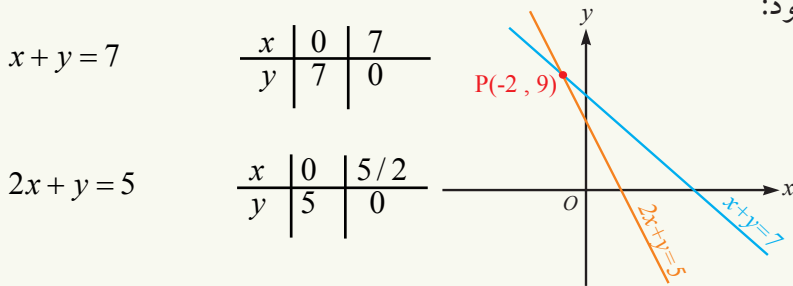
$$-x + 7 = -2x + 5$$

$$-x + 2x = 5 - 7 \Rightarrow x = -2$$

با گذاشتن 2- به عوض x در معادله یکی از خطوط، داریم که:

$$y = -x + 7 = -(-2) + 7 \Rightarrow y = 9$$

بنابر این $(-2, 9)$ حل سیستم معادلات و محل تقاطع دو خط است که در شکل زیر دیده می شود:



مثال 2: سیستم معادلات خطی زیر را حل کنید.

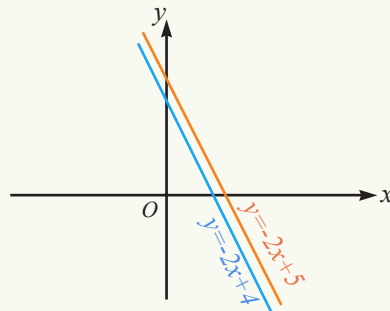
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3y = -6x + 12 \end{cases}$$

حل: ابتدا معادلات را طور زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = -\frac{6}{3}x + \frac{12}{3} \end{cases}$$

$$y = -2x + 5 \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 5/2 \\ y & 5 & 0 \end{array}$$

$$y = -2x + 4 \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ y & 4 & 0 \end{array}$$



چون میل هر دو خط مساوی به 2- است، در نتیجه خطوط بین خود موازی اند و یکدیگر را قطع نمی کنند؛ یعنی سیستم معادلات خطوط موازی، حل ندارد.

مثال 3: سیستم معادلات خطی را حل نمایید:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -28 = -4x - 4y \end{cases}$$

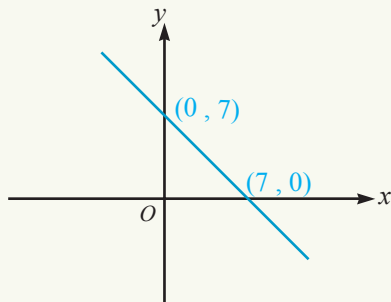
حل: ابتدا سیستم معادلات را طور زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = \frac{-4}{4}x + \frac{28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

x	0	7
y	7	0

x	0	7
y	7	0



به مشاهده می رسد که میل خطوط و تقاطع آنها با محور y نیز مساوی است؛ پس دو خط باهم منطبق اند در این حالت دو خط نقاط مشترک بی شمار دارند، در نتیجه سیستم معادلات خطی حل های زیادی دارد.

اگر در یک سیستم معادلات $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ اعداد حقیقی و x, y مجهول ها باشند، در آن صورت سیستم معادلات مذکور خطی اند؛ مانند سیستم معادلات زیر:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

نتیجه

- اگر خطوط یکدیگر را در یک نقطه قطع نمایند معادلات یک حل دارد.
- اگر خطوط با یکدیگر موازی باشند معادلات حل ندارند.
- اگر خطوط باهم منطبق باشند معادلات دارای بی نهایت حل می باشد.

تمرین

سیستم معادلات خطی زیر را حل نمایید.

1) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 2 = y \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - y = 6 \\ 8x - 2y = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$

حل سیستم معادلات خطی به روش تعویضی

$$\begin{array}{l}
 x+y = 4 \dots\dots I \\
 x-y = 6 \dots\dots II \\
 y = 4-x \\
 x - (4-x) = 6 \\
 x=5
 \end{array}$$

به حل سیستم معادلات خطی توجه کنید. به نظر شما قیمت عددی مجهول x به چه ترتیب به دست آمده است؟

فعالیت

- مجموعه دو زاویه یک مثلث 100° و حاصل تفریق آن 20° است، معادلات الجبری آن را بنویسید.
- سیستم معادلات فوق چند مجهول دارد قیمت عددی هر یک را دریابید.
- قیمت های حاصله جذر معادلات را در سیستم امتحان کنید.

در نتیجه فعالیت فوق حل مسأله و حل طریقه تعویضی سیستم معادلات خطی را در مثال زیر بیان می نماییم.

حل: اگر زوایای مثلث را A و B بنامیم عبارت فوق را به شکل معادلات الجبری طور زیر می نویسیم:

$$\hat{A} + \hat{B} = 100^\circ \dots\dots\dots I$$

$$\hat{A} - \hat{B} = 20^\circ \dots\dots\dots II$$

حال قیمت A را از جنس B از معادله اول به دست می آوریم: $\hat{A} = 100^\circ - \hat{B}$
این قیمت A را در معادله دوم به عوض $\hat{A}$ وضع نموده معادله را حل می نماییم.

$$100^\circ - \hat{B} - \hat{B} = 20^\circ \Rightarrow -2\hat{B} = -80^\circ \Rightarrow \hat{B} = 40^\circ$$

حال این قیمت B را در یکی از معادلات سیستم وضع نموده، قیمت عددی $\hat{A}$ را به

$$\hat{A} - \hat{B} = 20^\circ$$

دست می آوریم:

$$\hat{A} - 40^\circ = 20^\circ \Rightarrow \hat{A} = 20^\circ + 40^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

مثال: سیستم معادلات دو مجهوله زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

حل: اول قیمت یک مجهول را از جنس مجهول دیگر به دست آورده آن را در معادله دوم آن را وضع می نماییم:

$$2x + 3y = 0 \Rightarrow 2x = -3y \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y$$

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y &= 10 \\ 3\left(-\frac{3}{2}y\right) + 2y &= 10 \\ -\frac{9}{2}y + 2y &= 10 \\ \frac{-9+4}{2}y &= 10 \\ -5y &= 20 \Rightarrow y = -4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= -\frac{3}{2}y \\ x &= -\frac{3}{2}(-4) \\ x &= -3(-2) \\ \boxed{x = 6} \end{aligned}$$

برای حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول، طور زیر عمل می نماییم:

- قیمت یک مجهول را از جنس مجهول دیگر دریافت نموده در معادله دوم آن را وضع می نماییم.
- "معادله یک مجهوله درجه یک حاصل شده را حل و قیمت مجهول را به دست می آوریم.

- "این قیمت حاصل شده مجهول، در یکی از معادلات داده شده سیستم وضع می کنیم قیمت مجهول دیگر به دست می آید.
- قیمت های به دست آمده مجهول ها را در سیستم معادلات وضع نموده، اگر همزمان در هر دو معادله صدق کند حل معادله صحیح و در غیر آن صحیح نیست.

تمرین

حل سیستم معادلات خطی زیر را به روش تعویضی به دست آرید.

1) $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x - 2y = 15 \\ 6x - y = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a - 3b = 25 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} + \frac{y+2}{4} = 4 \\ \frac{x+3}{3} = \frac{x-y}{3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{2} = -4 \end{cases}$

حل سیستم معادلات خطی به روش افنا

$$x + y = 15$$

$$\frac{1}{3}x + y = 5$$

$$x = ?$$

$$y = ?$$

عبدالله به عبدالرحمن گفت اگر پول هایت را برایم بدهی من صاحب 15 افغانی می شوم، عبدالرحمن به عبدالله گفت اگر سوم حصه پول خود را به من بدهی من صاحب 5 افغانی می شوم، هر کدام آنها چند افغانی خواهند داشت.

فعالیت

- سیستم معادلات خطی را بنویسید که دو معادله با دو مجهول داشته باشد.
- حل سیستم فوق را به روش تعویضی به دست آورید.
- آیا روش دیگری برای حل سیستم فوق موجود است؟

یکی از روش های دیگر حل سیستم معادلات روش افنا می باشد که در مثال زیر آن را شرح می دهیم:

مثال 1: سیستم معادلات خطی زیر را حل کنید:

$$7x + 5y = 41 \quad \text{..... I}$$

$$5x - 2y = 7 \quad \text{..... II}$$

حل: اول معادلات را طوری تغییر شکل می دهیم که اگر آنها را طرف به طرف جمع یا تفریق نماییم یکی از مجهول ها افنا (حذف) گردد؛ مثلاً برای افنای مجهول x ، اطراف معادله اول را در ضریب x معادله دوم یعنی 5 ضرب نموده و اطراف معادله دوم را در ضریب x معادله اول یعنی 7 ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} 5 \times \begin{cases} 7x + 5y = 41 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 35x + 25y = 205 \\ 35x - 14y = 49 \end{cases} \end{aligned}$$

حال معادلات جدید را از همدیگر تفریق می کنیم:

$$\begin{array}{r} 35x + 25y = 205 \\ 35x - 14y = 49 \\ \hline 39y = 156 \end{array} \Rightarrow y = \frac{156}{39} \Rightarrow y = 4$$

حال قیمت y را در یکی از سیستم معادلات وضع نموده؛ قیمت x را به دست می آوریم.
 $5x - 2y = 7$
 $5x - 2(4) = 7 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$

مثال 2: سیستم معادلات زیر را به طریقه افنا حل کنید:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

حل: ابتدا یکی از مجهول ها یعنی y را حذف می نماییم بنا بر این معادله اول را به -3 ضرب می کنیم و معادله دوم را به 2 ضرب نموده حاصل آن را طرف به طرف جمع می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \Rightarrow -9x - 6y = -12 \\ 2x - 3y = -1 \Rightarrow -4x \mp 6y = \mp 2 \\ \hline -13x + 0 = -10 \\ x = \frac{10}{13} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3(\frac{10}{13}) + 2y = 4 \Rightarrow \frac{30}{13} + 2y = 4 \\ 2y = 4 - \frac{30}{13} \Rightarrow 2y = \frac{52 - 30}{13} \\ 2y = \frac{22}{13} \Rightarrow y = \frac{11}{13} \end{array}$$

- هر مجهولی را که می خواهیم افنا نماییم ضریب آن را در معادله دوم ضرب می کنیم و همچنان ضریب عین مجهول معادله دوم را در معادله اول ضرب می کنیم.
- معادلات حاصل شده را از همدیگر تفریق می کنیم که قیمت یک مجهول به دست می آید. این قیمت حاصل شده را در یکی از معادلات سیستم وضع مینماییم، قیمت مجهول دومی به دست می آید.

تمرین

حل سیستم معادلات خطی زیر را به طریقه افنا به دست آرید.

1) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = -39 \\ x - y = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} + \frac{10}{y} = 18 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 10x + 3y = 26 \\ 8x + 3y = 18 \end{cases}$

- مختصات نقطهٔ وسطی هر قطعه خط از رابطهٔ $M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ به دست می آید.
- مستقیم های موازی دارای میل های مساوی می باشند.
- اگر دو مستقیم میل های مساوی داشته باشند، در نتیجه زوایایی که با جهت مثبت محور x می سازند نیز با هم مساوی اند.
- میل هر خط مستقیم موازی با محور x ، صفر و میل هر خط مستقیم عمود بر محور x تعریف نشده است.
- هر رابطهٔ خطی بر حسب x و y که در آن توان x و y یک باشد. معادلهٔ یک خط مستقیم می باشد.
- معادلهٔ خط مستقیم در حالت ستندرد به شکل زیر است:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \text{یا} \quad ax + by + c = 0 \quad \text{که در آن } a, b, c \text{ اعداد حقیقی و } b \neq 0 \text{ است.}$$
- اگر دو خط مستقیم $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ متقاطع باشند
میل آنها باهم مساوی نبوده و در بین ضرایب رابطهٔ ذیل به وجود می آید: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
یا $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$
- اگر در سیستم معادلات خطی معادله یک حل داشته باشد خطوط یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
- اگر خطوط با یکدیگر موازی باشند، سیستم معادلات حل ندارد یعنی:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$
- اگر خطوط باهم منطبق باشند سیستم معادلات بی نهایت حل دارد. که رابطهٔ زیر برقرار میشود:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

تمرینات فصل دوم

● در سؤالهای زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است دور جواب صحیح را حلقه کنید.

1- مختصات نقطه وسطی دو نقطه $A(0, y_1)$ و $B(0, y_2)$ عبارت است از:

(a) $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ (b) $M(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ (c) $M(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$ (d) $M(0, 0)$

2- مختصات نقطه وسطی دو نقطه $A(x_1, 0)$ و $B(x_2, 0)$ عبارت است از:

(a) $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ (b) $M(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ (c) $M(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$ (d) $M(0, 0)$

3- میل یک خط مستقیم عبارت است از:

(a) $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ (b) $m = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ (c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (d) $m = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

4- دو مستقیم وقتی با هم موازی اند که:

- (a) میل های آنها با هم مساوی باشند. (b) میل های آنها مساوی نباشند.
(c) حاصل ضرب میل های آنها منفی یک باشد. (d) همه درست است.

● جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

- 1- در سیستم کمیات وضعیه محور X را محور و محور Y را محور گویند.
- 2- در ناحیه دوم نقاطی قرار دارند که X آنها و Y آنها است.
- 3- در ناحیه سوم نقاطی قرار دارند که هم X و هم Y آنها است.
- 4- مستقیمی که با جهت مثبت محور X زاویه حاده بسازد میل آن است.

5- دو مستقیم موازی با جهت مثبت محور X زوایای می سازند.

6- میل هر مستقیم موازی با محور X است.

7- اگر میل دو خط با یکدیگر مساوی نباشند آن دو خط اند.



فصل سوم
مثلثات





$$\sin \theta \quad \sec \theta$$

$$\cos \theta \quad \csc \theta$$

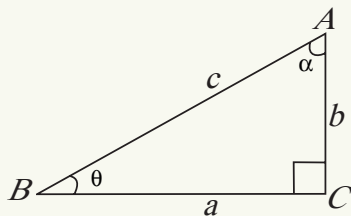
$$\tan \theta \quad \cot \theta$$

در شکل مقابل چند نسبت مثلثاتی وجود دارد؟ نام بگیرید.

فعالیت

• یک مثلث قائم الزاویه را رسم نمایید، با نظر داشت شکل شش نسبت مثلثاتی یک زاویه را بنویسید.

مثال ۱: مثلث قائم الزاویه زیر را در نظر بگیرید و نسبت مثلثاتی زاویه θ و α را بنویسید.



حل:

$$\sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

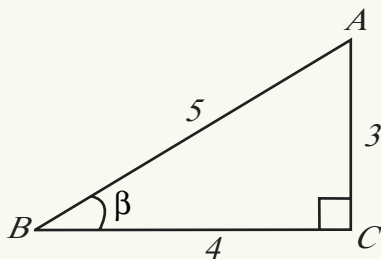
$$\cot \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

$$\sec \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$\csc \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

یادداشت: نسبت های مثلثاتی زاویه α را شاگردان بنویسند.

مثال ۲: در مثلث قائم الزاویه زیر نسبت های مثلثاتی زاویه β را به دست آورید.



حل:

$$\sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{4}{5}$$

$$\tan \beta = \frac{3}{4}$$

$$\cot \beta = \frac{4}{3}$$

$$\sec \beta = \frac{5}{4}$$

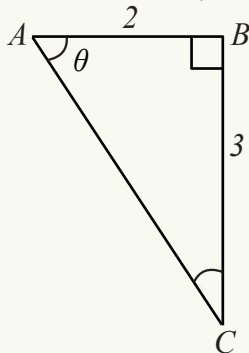
$$\csc \beta = \frac{5}{3}$$

تمرین

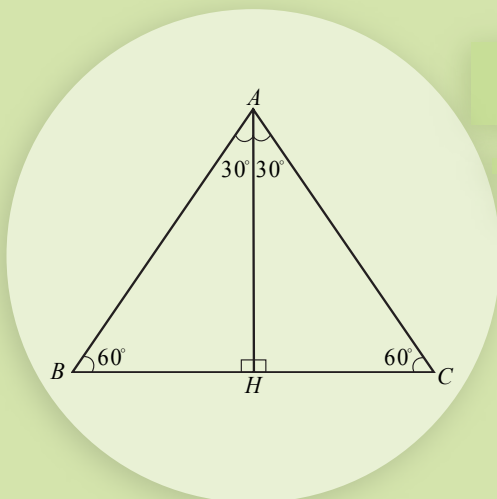
در مثلث قائم الزاویه زیر:

1 - طول وتر $\overline{AC}$ را معلوم کنید.

2 - نسبت های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.



نسبت های مثلثاتی زوایای معلوم

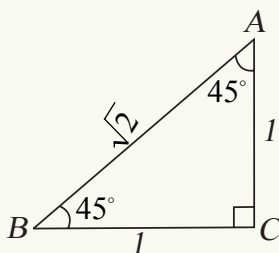


کدام زوایا را زوایای معلوم گویند؟
بنویسید.

فعالیت

• یک مثلث متساوی الاضلاع را رسم کنید، بعد ارتفاع AH آن را رسم نموده و سپس نسبت مثلثاتی 30° و 60° را به دست آرید.

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه 45° را دریافت کنید.



حل:

$$\sin 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

نتیجه:

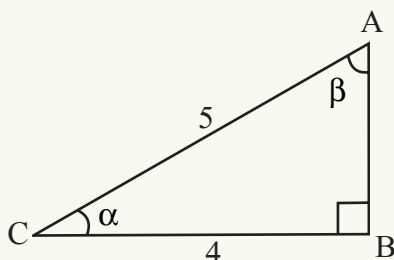
نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایای خاص را می توان به آسانی به دست آورد؛ ولی محاسبه نسبت های مثلثاتی سایر زوایا کار مشکل است؛ بنا بر آن از طرف بعضی علما توسط فورمول های خاص جدول ها ترتیب گردیده است که با استفاده از این جدول ها می توانیم نسبت های مثلثاتی هر زاویه را به دست آریم.

قابل تذکر است که در ترتیب جدول از مثلث قائم الزاویه، زاویه θ و رابطه $(90 - \theta)$ یا $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ استفاده گردیده است.

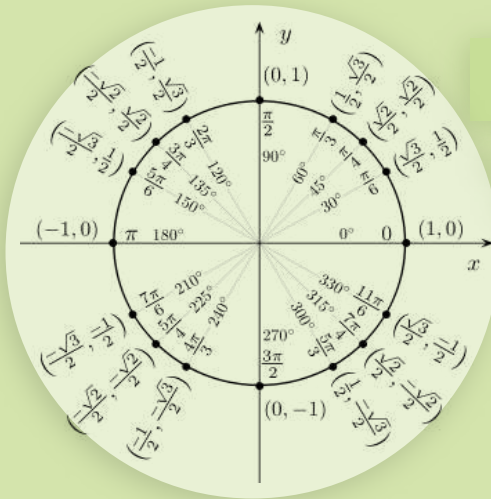
تمرین

در مثلث قائم الزاویه زیر:

- 1 - طول ضلع قائم AB را معلوم کنید.
- 2 - نسبت های مثلثاتی زاویه α را به دست آورید.
- 3 - نسبت های مثلثاتی زاویه β را معلوم کنید.



جدول مثلثاتی و استعمال آن



در شکل مقابل (دایره مثلثاتی) آیا نسبت های مثلثاتی زوایا را نشان داده می توانید؟

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	
0° 00'	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90° 00'
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00'	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	89° 00'
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00'	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	88° 00'
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00'	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	87° 00'
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00'	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	86° 00'
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00'	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	85° 00'
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	θ

θ	SIN θ	COS θ	TAN θ	COT θ	
6° 00'	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84° 00'
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00'	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83° 00'
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30'	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30'
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00'	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82° 00'
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00'	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81° 00'
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00'	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80° 00'
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00'	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79° 00'
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
	COS θ	SIN θ	COT θ	TAN θ	θ

θ	SIN θ	COS θ	TAN θ	COT θ	
12° 00'	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	78° 00'
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00'	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77° 00'
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00'	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76° 00'
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00'	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	75° 00'
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	10
16° 00'	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	74° 00'
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	10
17° 00'	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	73° 00'
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	10
18° 00'	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	72° 00'
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	10
19° 00'	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	71° 00'
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	10
20° 00'	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	70° 00'
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	10
21° 00'	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	69° 00'
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	10
22° 00'	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	68° 00'
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4549	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30
30'	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30'
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	10
	COS θ	SIN θ	COT θ	TAN θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
23° 00'	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67° 00'
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00'	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66° 00'
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00'	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65° 00'
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00'	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64° 00'
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00'	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63° 00'
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00'	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62° 00'
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00'	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61° 00'
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00'	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60° 00'
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00'	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59° 00'
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00'	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58° 00'
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00'	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57° 00'
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	SIN θ	COS θ	TAN θ	COT θ	
34° 00'	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	56° 00'
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00'	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55° 00'
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00'	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54° 00'
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00'	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53° 00'
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00'	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52° 00'
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00'	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51° 00'
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00'	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50° 00'
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00'	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49° 00'
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00'	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48° 00'
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00'	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47° 00'
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00'	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46° 00'
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00'	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45° 00'
	COS θ	SIN θ	COT θ	TAN θ	θ

فعالیت

به جدول توجه کنید.

- سطر و ستون اول جدول چه را نشان می‌دهد؟
- ستون اول طرف راست و چپ جدول به کدام زاویه شروع و به کدام زاویه ختم شده است؟
- هرگاه یک زاویه 45° و یا از 45° کوچکتر باشد، نسبت های مثلثاتی آن را در طرف چپ جدول در ستون درجه پیدا می نمایم از طرف بالا یا پایین می خوانیم اگر زاویه از 45° بزرگتر باشد چی باید کرد؟

نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می نمایم:

اگر زاویه از 45° کوچکتر باشد آن زاویه را در ستون اول سمت چپ جدول و نسبت مثلثاتی آن را به طرف بالا در سطر اول پیدا می نمایم.
اگر زاویه از 45° بزرگتر باشد آن زاویه را در ستون اول سمت راست جدول و نسبت مثلثاتی آن را از پایین به طرف بالا در سطر آخر پیدا می نمایم.

مثال 1: کوساین $30^\circ 10'$ را دریابید.

حل: ابتدا در ستون اول سمت چپ جدول، زاویه مطلوب ($30^\circ 10'$) را می یابیم و در سطر اول جدول نسبت مثلثاتی آن را دریافت نموده تقاطع سطر و ستون، عدد (0,8646) را نشان می دهد که کوساین $30^\circ 10'$ است.

$$\cos(30^\circ 10') = ? \qquad \begin{array}{c} \circ \\ \vdots \\ 30^\circ 10' \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{cos} \\ \vdots \\ 0,8646 \end{array}$$

مثال 2: ساین $84^\circ 50'$ را تعیین کنید.

حل: ابتدا در ستون اول سمت راست جدول، زاویه $84^\circ 50'$ را پیدا می‌نماییم و در سطر اخیر جدول نسبت مثلثاتی مطلوب را می‌یابیم، تقاطع این سطر و ستون عدد (0,9959) را می‌دهد که ساین $84^\circ 50'$ است.

$$\sin 84^\circ 50' = ? \quad \begin{array}{c} \text{0,9959} \\ \text{sin} \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{84}^\circ \\ \text{50}' \end{array}$$

یادداشت

نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که تفاوت شان هرده دقیقه باشد در جدول موجود می‌باشد اما نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را نمی‌توانیم از این جدول به دست آوریم حالا می‌خواهیم طریقه‌ی رای‌بان نماییم که توسط آن نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را به دست می‌آوریم این طریقه را انترپولیشن (Interpolation) می‌نامند که در مثال‌های زیر آن را مطالعه می‌نماییم.

مثال: $\tan 42^\circ 35'$ را به دست آرید.

حل: در جدول، تانجنت $42^\circ 35'$ موجود نیست؛ اما تانجنت $42^\circ 40'$ و $42^\circ 30'$ در جدول موجود است که با استفاده از آن تانجنت زاویه $42^\circ 35'$ را دریافت می‌نماییم.

$\tan 42^\circ 40' = 0.9217$	فرق دو زاویه	:	فرق نسبت‌های مثلثاتی
$\tan 42^\circ 35' = ?$	$10'$	:	0.0054
$\tan 42^\circ 30' = 0.9163$	$5'$	:	x

دیده می شود که فرق دو زاویه اول و دوم $5'$ و فرق زوایای اول و سوم $10'$ است به همین ترتیب فرق تانجنت آن x است؛ یعنی اگر زاویه به اندازه $10'$ فرق داشته باشد $\tan$ آن به اندازه $0,0054$ فرق پیدا می کند و اگر زاویه به اندازه $5'$ فرق داشته باشد تانجنت آن به اندازه x فرق میکند که با استفاده از تناسب می توانیم بنویسیم.

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0,0054} \Rightarrow x = 0,0027$$

قیمت را با زاویه کوچک جمع می نماییم:

$$0,9163 + 0,0027 = 0,9190$$

$$\tan 42^\circ 35' = 0,9190$$

تمرین

با استفاده از جدول نسبت های مثلثاتی:

1 - $\cos \alpha, \sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را به دست آرید، در صورتی که $\alpha = 35^\circ 20'$ باشد.

2 - $\cos \beta, \sin \beta$ و $\tan \beta$ را به دست آرید، در حالی که $\beta = 75^\circ 10'$ باشد.

حل مثلث های قائم الزاویه



به شکل مقابل توجه نمایید، آیا گفته می‌توانید که ارتفاع منار را چطور می‌توان پیدا کرد؟

فعالیت

- هرگاه یک زاویه مثلث قائم الزاویه $30^\circ 40'$ باشد، زاویه دیگر آن را دریابید.
- هرگاه یک زاویه مثلث قائم الزاویه 29° و وتر آن $25m$ باشد، عناصر نامعلوم مثلث را دریابید.
- هرگاه دو ضلع مثلث قائم الزاویه یا یک ضلع و یک زاویه حاده آن معلوم باشد عناصر دیگر مثلث را چطور پیدا کرده می‌توانیم؟

نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می‌نماییم:

در هر مثلث قائم الزاویه اگر زاویه حاده و دو ضلع آن معلوم باشد، متباقی اجزای مثلث را با استفاده از نسبت های مثلثاتی به دست می‌آوریم.

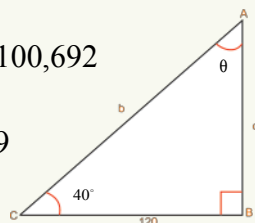
مثال 1: هرگاه یک زاویه حاده مثلث قائم الزاویه 40° و ضلع مجاور این زاویه 120 واحد طول باشد، مثلث مذکور را حل نمایید.

حل: از این که یک زاویه و دو ضلع مثلث نامعلوم است؛ بنابر این با استفاده از اجزای معلوم اجزای نامعلوم را طور زیر به دست می‌آوریم.

$$1, \quad \theta = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$2, \quad \tan 40^\circ = \frac{c}{120} \Rightarrow c = 120 \tan 40^\circ = 120 \cdot 0,8391 = 100,692$$

$$3, \quad \cos 40^\circ = \frac{120}{b} \Rightarrow b = \frac{120}{\cos 40^\circ} = \frac{120}{0,7660} = 156,6579$$



مثال 2: هر گاه وتر یک مثلث قائم الزاویه 49.7 unit و یک ضلع قائم آن 25 unit باشد مثلث مذکور را حل کنید.

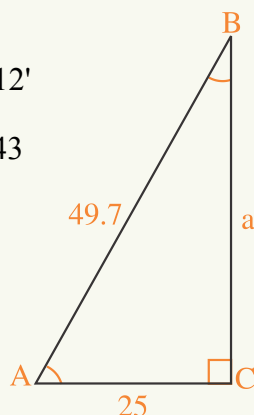
حل: دیده می شود که دو عنصر مثلث معلوم است؛ پس عناصر نامعلوم مثلث را طور زیر دریافت می نماییم:

$$1) \cos \hat{A} = \frac{25}{49.7} = 0.503$$

$$\cos \hat{A} = 0.503 \Rightarrow \hat{A} = 59.8^\circ = 59^\circ 48'$$

$$2) \hat{B} = 90^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ - 59.8^\circ = 30.2^\circ = 30^\circ 12'$$

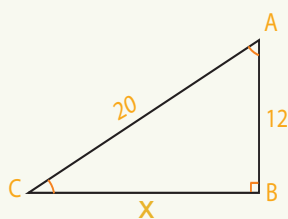
$$3) \tan \hat{A} = \frac{a}{25} \Rightarrow a = \tan \hat{A} \cdot 25 = 25 \cdot 1.7182 = 43$$



تمرین

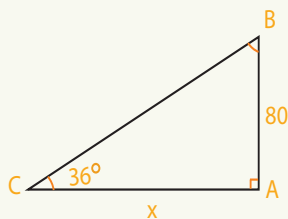
1- اگر یک زاویه حاده مثلث قائم الزاویه $38^\circ 50'$ و ضلع مجاور این زاویه 311 واحد باشد، مثلث مذکور را حل نمایید.

2- در اشکال زیر عناصر مجهول را دریافت نمایید.



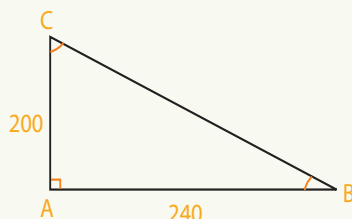
$$x = ?$$

$$\hat{A} = ?$$



$$x = ?$$

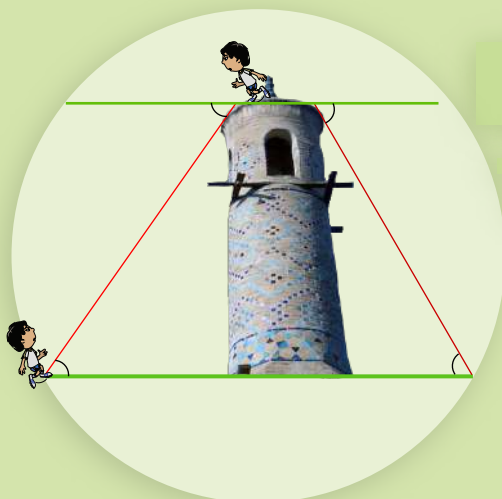
$$\hat{B} = ?$$



$$\hat{B} = ?$$

$$\overline{BC} = ?$$

زوایای میل، ارتفاع و تنزیل



در شکل مقابل توجه کنید، آیا میتوانید زوایای میل و تنزیل را نشان دهید؟

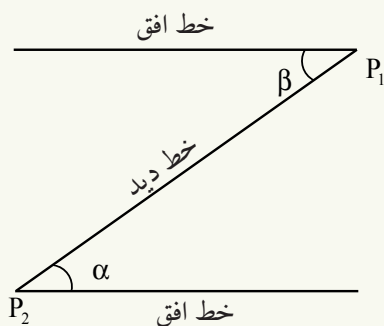
فعالیت

- هرگاه احمد در یک ارتفاع قرار گیرد خط دید وی با سطح افق چه زاویه را می سازد و این زاویه به نام چه یاد میگردد؟
- هرگاه یک شخص دیگر در پایین قرار داشته باشد خط دید وی با سطح افق کدام زاویه را می سازد و این زاویه به نام چه یاد میگردد؟

نتیجه:

1- زاویه ارتفاع Angle of Elevation

هرگاه یک شخص در پایین قرار داشته باشد و به یک ارتفاع نظر کند، خط دید وی با افق یک زاویه را تشکیل می دهد که زاویه ارتفاع نامیده می شود؛ مانند زاویه داده شده α .



2- زاویه تنزیل Angle of Depression

هرگاه یک شخص دیگری در یک ارتفاع قرار داشته باشد و به طرف پایین بنگرد خط دید وی با سطح افق یک زاویه را تشکیل میدهد که زاویه تنزیل نامیده می شود؛ مانند زاویه β که در شکل نمایش داده شده است.

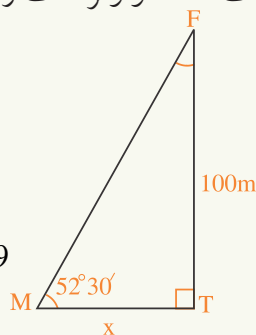
مثال 1: در مثلث قائم الزاویه $\triangle MTF$ زاویه ارتفاع $52^\circ 30'$ و ارتفاع مثلث $100m$ است. قاعده و وتر مثلث را دریابید.

$$\tan 52^\circ 30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MT}} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{100}{\tan 52^\circ 30'} = \frac{100}{1.3032} \Rightarrow x = 76.73m$$

$$\overline{MF}^2 = \overline{FT}^2 + \overline{MT}^2 = (100)^2 + (76.73)^2 = 10000 + 5887.49$$

$$\overline{MF}^2 = 15887.49 = \sqrt{15887.49} = 126.04m$$



مثال 2: طول تار یک کاغذ پرن $120m$ است، زاویه ارتفاع کاغذ پرن 45° است. ارتفاع کاغذ پرن را دریابید.

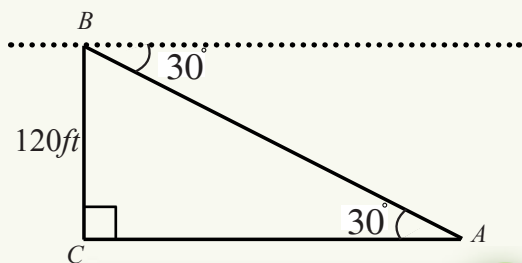
$$\sin 45^\circ = \frac{h}{120} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{120} \Rightarrow h = \frac{120\sqrt{2}}{2} = 60\sqrt{2}m$$

مثال 3: یک برج ترصد از بحر $120ft$ ارتفاع دارد زاویه نزولی که تحت آن کشتی از برج دیده می شود 30° است کشتی متذکره از برج چقدر فاصله دارد؟

$$\cot A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{120}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 120 \cdot \cot 30^\circ = 120 \cdot 1.7 = 204ft$$



تمرین

1- ارتفاع درختی را دریابید که زاویه ارتفاع آن از 20° به 40° تبدیل گردد درین حالت مشاهد $75ft$ به درخت نزدیک میگردد.

2- یک درختی را باد از طرف بالا طوری شکستاده است که تنه درخت و حصه شکسته آن یک مثلث قائم الزاویه را با زمین میسازند، اگر قسمت شکسته با زمین زاویه 50° را تشکیل داده باشد و طول تنه درخت $20ft$ باشد ارتفاع درخت را دریابید.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

آیا گفته می‌توانید که یک رابطه مثلثاتی
چی وقت معادله مثلثاتی می باشد؟

میدانیم که مطابقت مساواتی را گویند که برای همه قیمت های متحول اطراف مساوات
باهم برابر گردد و معادله مساواتی است که برای بعضی از قیمت های متحول اطراف
مساوات باهم برابر گردد.

فعالیت

- یک معادله مثلثاتی را بنویسید.
- در این معادله مجهول را نشان دهید.
- به کدام قیمت مجهول، معادله صدق می کند.

نتیجه فعالیت فوق را طور زیر بیان می نمایم.

تعریف:

هر معادله‌یی که در آن یک یا چند نسبت مثلثاتی موجود باشد معادله مثلثاتی نامیده
می شود؛ مانند $\sin x + \cos x = 1$ ، $\sin x - 1 = 0$ یا $2 \cos x - 1 = 0$
- آن زاویه یا قوسی که نسبت مثلثاتی آن مطلوب باشد مجهول اصلی نامیده می شود
مثلاً در معادله فوق x مجهول اصلی است.

برای حل معادلات مثلثاتی طور زیر عمل می نماییم:

- 1- با استفاده از معادلات الجبری قیمت مجهول را به دست می آوریم.
- 2- با کمک جدول نسبت های مثلثاتی قیمت مجهول اصلی را به دست می آوریم.
- 3- چون معادلات مثلثاتی پیروی دیک اند؛ بنابر این حل های بی شمار دارند؛ پس با استفاده از فورمول های زوایایی که نسبت های مثلثاتی یکسان دارند، حل های معادله را دریافت می کنیم.

مثال: حل های معادلات مثلثاتی $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$ و $\cos x + \frac{1}{2} = 1$ را دریابید.

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$\cos x + \frac{1}{2} = 1$$

$$2 \sin x = \sqrt{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 45^\circ$$

$$\Rightarrow x = 60^\circ$$

تمرین

حل معادلات زیر را دریابید.

a) $\sqrt{3} \cot x - 1 = 0$

b) $2 \sin 3x + \sqrt{3} = 0$

c) $2 \cos 4x - \sqrt{2} = 0$

نکات مهم فصل سوم

- مثلثات (Trigonometry) از دو کلمه یونانی (Trigon) یعنی مثلث و (Metron) یعنی اندازه کردن تشکیل شده و عبارت از علمی است که از روابط بین عناصر مثلث بحث می کند.
- در هر مثلث قائم الزاویه برای زوایای قائمه آن شش نسبت مثلثاتی تعریف شده است که عبارت اند از: $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec$ و $\csc$.
- زاویه‌یی که از پایین به بالا خط دید با افق می سازد به نام زاویه‌یی ارتفاع و زاویه‌یی که از بالا به پایین خط دید با افق می سازد به نام زاویه‌ی تنزیل یاد می گردد.
- نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌یی که در جدول موجود نباشند از طریق انترپولیشن دریافت می گردند.

تمرینات فصل سوم

- در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- نسبت $\sin \alpha$ یک زاویه حاده عبارت است از:

- (a) $\frac{\text{طول ضلع مقابل زاویه حاده}}{\text{طول وتر}}$
- (b) $\frac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مجاور زاویه حاده}}$
- (c) $\frac{\text{طول ضلع مجاور زاویه حاده}}{\text{طول وتر}}$
- (d) $\frac{\text{طول وتر}}{\text{طول ضلع مقابل زاویه حاده}}$

2- نسبت $\tan x$ مساوی است به:

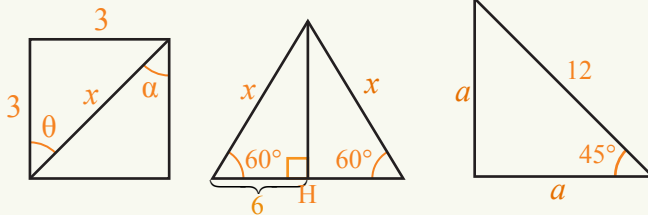
- (a) $\frac{1}{\cos x}$
- (b) $\frac{\cos x}{\sin x}$
- (c) $\frac{1}{\sin x}$
- (d) $\frac{\sin x}{\cos x}$

3- قیمت افاده $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ مساوی است به:

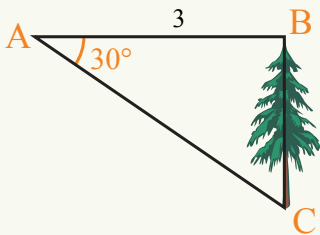
- (a) 2
- (b) 1
- (c) -2
- (d) -1

- سؤالات زیر را حل نمایید:

1- در اشکال زیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای داده شده را دریافت نمایید.



2- در شکل زیر اگر $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد فاصله‌های AC و BC را محاسبه کنید.





فصل چهارم

افاده های الجبری



تجزیه به فکتور (فکتورگیری)



در شکل مقابل چند دسته گل را می بینید؟
آیا گفته می‌توانید که کدام دسته ها با هم مشابه
اند؟
و چند شاخچه سازندهٔ یک دسته گل است؟

فعالیت

- جاهای خالی را با اعداد پر کنید.
 $5x = (\dots + \dots)x = \dots x + \dots x$
 $6y = (\dots + \dots)y = \dots y + \dots y$
- در روابط بالا از چه خاصیتی استفاده گردیده است؟
- ضرایب عددی طرف راست با ضریب متحول در طرف چپ چه رابطه‌ی دارد؟
- $3x + 2x = (\dots + \dots)x = \dots x$
 آیا می‌توان $a + b$ را تجزیه کرد؟ $ax + bx = (\dots + \dots)x = \dots x$

در فعالیت بالا به مشاهده رسید که:

در تجزیه برخی افاده‌های الجبری می‌توان از خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع استفاده کرد. با تشخیص عامل مشترک در افاده‌ها، می‌توان یک افاده الجبری را تجزیه نماییم.

مثال 1: افاده‌های الجبری زیر را تجزیه کنید: x^4

a) $ab + ac - ad$

b) x^4

c) $\frac{1}{2}m^2 - 2m$

d) $3xy - 6x^2$

حل: در افاده‌های داده شده ابتدا جمله مشترک در همه حدود را دریافت نموده آن را پیش روی قوس می‌نویسیم، پس تمام حدود را به این جمله مشترک تقسیم نموده و حاصل آن را در بین قوس می‌نویسیم.

$$a) ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

$$b) x^4 - x^3y + x^2y^2 = x^2(x^2 - xy + y^2)$$

$$c) \frac{1}{2}m^2 - 2m = m(\frac{1}{2}m - 2)$$

$$d) 3xy - 6x^2 = 3x(y - 2x)$$

مثال 2: افاده‌های زیر را تجزیه کنید:

$$a) Ax + Bx + Ay + By$$

$$b) x^2 - 4y^2 + x + 2y$$

$$c) 2x^2 + 2xy + 3x + 3y$$

$$d) 2x + 2y + 2x + 2y$$

حل: افاده‌ها را اول طوری ترتیب می‌کنیم که حدود مشترک پهلوی هم قرار گیرند بعد حدود مشترک را در افاده‌ها دریافت نموده و سپس آن را تجزیه می‌نماییم.

$$\begin{aligned} a) & \underbrace{Ax + Bx}_x + \underbrace{Ay + By}_y \\ &= x(A + B) + y(A + B) \\ &= (A + B)(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & x^2 - 4y^2 + x + 2y \\ &= [x^2 - (2y)^2] + (x + 2y) \\ &= (x - 2y)(x + 2y) + (x + 2y) \\ &= (x + 2y)(x - 2y + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) & 2x^2 + 2xy + 3x + 3y \\ &= 2x(x + y) + 3(x + y) \\ &= (x + y)(2x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) & 2x + 2y + 2x + 2y \\ &= 4x + 4y \\ &= 4(x + y) \end{aligned}$$

تمرین

افاده‌های زیر را تجزیه کنید.

$$1) x^4 - x^3y + x^2x$$

$$2) x(2x - 3y)^2 + 8(2x - 3y)$$

$$3) 10ab - 15ac$$

$$4) 32x^2y - 4xy^2$$

$$5) \sqrt{2}x^3y^2 - \sqrt{8}xy$$

$$6) 0.5mn^2 - 0.125m^4n^3$$

$$7) ab + b + b$$

$$8) \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x^4$$

$$9) mab + my + ny + nab$$

$$10) ab(b + a + c) + ac(a + b + c) + bc(c + b + a)$$



کوچکترین مضرب مشترک (L.C.M)

برای پیدا کردن حاصل جمع $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ دریافت نمودن کوچکترین مضرب مشترک بین اعداد 4 و 6 (مخرج مشترک) ضرورت است. برای پیدا کردن حاصل جمع $\frac{3}{x^2-1} + \frac{2}{2x+2}$ کدام روش را پیشنهاد می کنید؟

فعالیت

- برای پیدا کردن حاصل جمع $\frac{3}{6} + \frac{2}{8}$ ابتدا کوچکترین مضرب مشترک 6 و 8 را پیدا می کردیم، مراحل آن را توضیح دهید.
- افاده های $2x+2$ و x^2-1 را به عوامل ضربی شان تجزیه کنید.
- عوامل ضربی مشترک و غیر مشترک را تعیین کنید.
- برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک $2x+2$ و x^2-1 فکر کنید چه عملی باید انجام شود؟
- کوچکترین مضرب مشترک $2x+2$ و x^2-1 کدام است؟ آن را به دست بیاورید.
- حاصل جمع $\frac{3}{x^2-1} + \frac{2}{2x+2}$ را دریافت نمایید.

برای به دست آوردن کوچکترین مضرب مشترک، دو یا چند افاده الجبری ابتدا آن ها را به عوامل ضربی اولیه تجزیه نموده؛ سپس عوامل مشترکی که بزرگترین توان را دارند، در عوامل ضربی غیر مشترک ضرب نموده؛ کوچکترین مضرب مشترک افاده ها به دست می آید.

مثال 1: کوچکترین مضرب مشترک افاده‌های $4x^2$ ، $2x+2$ و x^2-1 را به دست بیاورید.
حل: ابتدا افاده‌ها را به طور جداگانه تجزیه می‌کنیم:

$$4x^2 = 2^2 x^2$$

$$2x+2 = 2(x+1)$$

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

دیده می‌شود عامل مشترکی که بزرگترین توان را دارد $(x+1)$ و 2^2 است که حاصل ضرب آنها با عوامل غیرمشترک مساوی به $4x^2(x^2-1) = 2^2(x+1)(x-1)x^2$ بوده که به نام کوچکترین مضرب مشترک یا L.C.M یاد می‌شود.

مثال 2: کوچکترین مضرب مشترک افاده‌های $8x^2+40x+32$ ، $6x^2-6$ و $4x^2+12x-16$ را به دست آرید.

$$4x^2+12x-16 = 4(x^2+3x-4) = 2^2(x+4)(x-1)$$

$$8x^2+40x+32 = 8(x^2+5x+4) = 2^3(x+4)(x+1)$$

$$6x^2-6 = 6(x^2-1) = 2 \times 3(x-1)(x+1)$$

در نتیجه کوچکترین مضرب مشترک افاده‌ها عبارت است از:

$$2^3 \times 3(x+1)(x+4)(x-1)$$

تمرین

با در نظر داشت کوچکترین مضرب مشترک، ساده سازید.

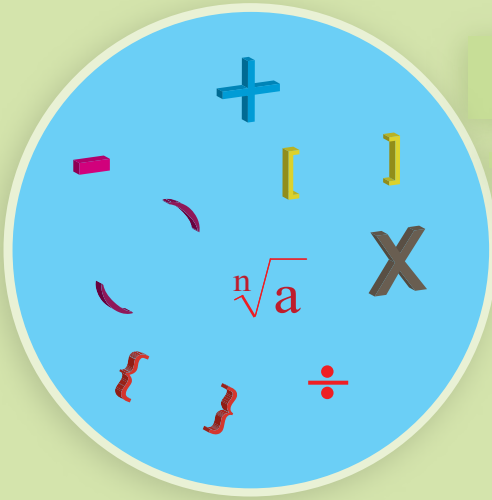
$$1) \frac{2x}{3} - \frac{4}{5x} \div \frac{3}{10x}$$

$$2) \frac{3x-1}{x^2+2x-15} - \frac{2}{x+5}$$

$$3) \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}$$

$$4) \frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x^3-1} + \frac{1}{x+1}$$

ساده کردن افاده‌های الجبری



هر گاه در افاده‌های الجبری علامات مقابل موجود باشد آیا گفته می‌توانید که به چه ترتیب افاده‌ها را ساده کرده می‌توانیم؟

فعالیت

• برای ساده کردن هر یک از افاده‌های زیر چه عملیه‌های باید انجام دهیم. این عملیه‌ها را به ترتیب شماره گذاری کنید.

$$3 - 2^4 \times 5 + (16 \div 4)$$

$$4 \times 5 \div 2 - 3(2 + 3^2) + 2$$

$$3x^2 - 4x(2 + x)$$

$$2x - 3\{-2(x+1)(x+2)\} + 6x \div 2$$

در فعالیت بالا دیدیم که ترتیب اجرای عملیه‌ها در افاده‌های الجبری از قانون ترتیب عملیات در اعداد پیروی می‌کند. برای ساده کردن یک افاده الجبری به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- 1- توان را رفع می‌نماییم.
- 2- در صورت موجودیت قوس‌ها، در قدم نخست قوس خورد، قوس متوسط و قوس بزرگ را رفع می‌کنیم.
- 3- به ترتیب از چپ به راست عملیه‌های ضرب و تقسیم را انجام می‌دهیم.
- 4- به ترتیب از چپ به راست عملیه‌های جمع و تفریق را انجام می‌دهیم.

مثال 1: افاده‌های زیر را ساده سازید.

$$1) \frac{1}{2}m - 3 \left[\left\{ 5\left(m - \frac{1}{2} - m\right) \right\} - m - 6 \right] \div 2$$

$$= \frac{1}{2}m - 3 \left[5m - \frac{5}{2} - 5m - m - 6 \right] \div 2$$

$$= \frac{1}{2}m - 3 \left[-m - \frac{17}{2} \right] \div 2$$

$$= \frac{1}{2}m + \left(3m + \frac{51}{2} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}m + \frac{3}{2}m + \frac{51}{4}$$

$$= \frac{m + 3m}{2} + \frac{51}{4} = \frac{4m}{2} + \frac{51}{4}$$

$$= 2m + \frac{51}{4}$$

$$2) 2x - 1 - \{-2(x + 2)\} + 2x \div 2 \times 5x$$

$$= 2x - 1 - (-2x - 4) + 2x \div 2 \times 5x$$

$$= 2x - 1 + 2x + 4 + x \times 5x$$

$$= 2x - 1 + 2x + 4 + 5x^2$$

$$= 4x + 5x^2 + 3$$

فعالیت

$$a) \sqrt[3]{\frac{5}{8}}$$

$$b) \sqrt{8x^3y^3}$$

$$c) \sqrt{3a\sqrt{49a^2}}$$

• عبارت‌های زیر را ساده سازید:

• برای از بین بردن جذرهای مخرج $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ و $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ از کدام مطابقت می‌توان

کمک گرفت؟

• با از بین بردن علامت جذر در مخرج کسرها، آن‌ها را ساده کنید.

عمل از بین بردن علامت جذر را در مخرج یک کسر به نام گویا کردن و یا ناطق ساختن کسر الجبری یاد میکنند.

مثال: مخرج کسره‌های زیر را ناطق سازید.

$$1) \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$2) \frac{2}{\sqrt[3]{a}}$$

$$3) \frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$$

$$4) \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

حل:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{2}{\sqrt{x}} &= \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{2}{\sqrt[3]{a}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} &= \frac{a-1}{\sqrt{a}-1} \times \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1} \\ &= \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2-1^2} \\ &= \frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{a-1} = \sqrt{a}+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3} \\ &= \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1} = -5(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

- برای ساده ساختن یک افاده الجبری ابتدا به ترتیب طاقت و قوس ها را رفع می سازیم؛ سپس به ترتیب از چپ به راست عملیه های ضرب، تقسیم را طوری که اگر اول ضرب بود ضرب را و اگر اول تقسیم بود عملیه تقسیم را و به همین ترتیب جمع و تفریق را انجام می دهیم.

- عامل ناطق سازی $\sqrt{x}$ عبارت از $\sqrt{x}$ است.

- عامل ناطق سازی $\sqrt{x} + 1$ عبارت از $\sqrt{x} - 1$ است.

- عامل ناطق سازی $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ عبارت از $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ است.

تمرین

افاده های زیر را ساده سازید.

1) $2x - 2\{3x - (2 + x) - 1\} \div 2$

2) $\frac{1}{3}y - 5\left[-2\left\{6\left(y - \frac{1}{3} - y\right)\right\}\right] \div 3$

3) $5 + (-18) - \{24 + (-30)\}(-7)$

4) $\{(-120) + (-330)\} \div 16 + \{168 + 240 - (-210)\} \div 6$

5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

6) $\frac{3}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

7) $2\sqrt{2000ab} - \frac{b}{a}\sqrt{72ab}$

8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$

9) $\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

10) $2\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \frac{1}{2}\sqrt{20x}$

11) $(\sqrt{2} + 1)(1 - \sqrt{2})$

نکات مهم فصل چهارم

- حاصل ضرب عوامل مشترک افاده های الجبری که بزرگترین توان را دارند در عوامل غیر مشترک افاده های الجبری به نام کوچکترین مضرب مشترک یا $L.C.M$ یاد می کنند.
- ابتدا به ترتیب طاقت ها، قوس های خورد، متوسط و بزرگ رافع؛ سپس به ترتیب عملیه های تقسیم، ضرب، جمع و تفریق را از چپ به راست انجام می دهیم.
- عامل ناطق سازی $\sqrt{x}$ عبارت از $\sqrt{x}$ است.
- عامل ناطق سازی $\sqrt{x} + 1$ عبارت از $\sqrt{x} - 1$ است.
- عامل ناطق سازی $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ عبارت از $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ است.

تمرینات فصل چهارم

- در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- در افاده $2x^2 - \frac{1}{2}x$ عامل مشترک:

- (a) 2 است (b) x است (c) $2x$ است (d) ندارد

2- حاصل ضرب افاده های $(x-2)(x+3)$ عبارت است از:

(a) $x^2 + 5x + 6$ (b) $x^2 - 5x - 6$

(c) $x^2 + x - 6$ (d) $x^2 - x + 6$

3- کوچکترین مضرب مشترک افاده $\frac{1}{2x+2} + \frac{3}{x^2-1}$ عبارت است از:

(a) $2(x+1)(x-1)$ (b) $(x+1)(x-1)$

(c) $(2x+2)(x^2-1)$ (d) هیچکدام.

4- عامل ناطق سازی افاده $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ عبارت است از:

(a) $\sqrt{a}$ (b) $\sqrt{b}$

(c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (d) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

- جاهای خالی را با کلمات و جملات مناسب پر کنید.

1- حاصل تقسیم $\frac{x^2-1}{x+1}$ عبارت از است.

2- حاصل ضرب $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$ عبارت از است.

- سؤالات زیر را حل نمایید.

1- کوچکترین مضرب مشترک $21x^2y^3$, $14x^3y^2$ را دریافت نمایید.

2- افاده زیر را ساده سازید.

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$$



فصل پنجم

نامساوات



تحلیل تعیین اشاره افاده کسری

$$\frac{?}{?} = +$$

$$\frac{?}{?} = -$$

آیا گفته می‌توانید برای اعداد حقیقی a و b کسر $\frac{a}{b}$ چه وقت دارای علامت مثبت و چه وقت دارای علامت منفی است؟

فعالیت

- افاده کسری $\frac{3x+5}{2x-2}$ در چه حالتی منفی می شود؟
 - به کدام قیمت x ، افاده کسری صفر است؟
 - آیا می توان در افاده فوق به جای x ، قیمت 1 را قرار داد؟ چرا؟
 - با تعیین اشاره افاده های صورت و مخرج می توانیم علامت افاده کسری فوق را از حاصل تقسیم اشاره های صورت و مخرج به دست آریم:
- $$3x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-5}{3}$$

می دانیم که برای $x < \frac{-5}{3}$ علامت صورت منفی و برای $x > \frac{-5}{3}$ علامت صورت مثبت است.

برای تعیین اشاره مخرج کسر ابتدا قیمتی که $2x-2$ را صفر می سازند، به دست می آریم.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

در نتیجه برای $x < 1$ علامت مخرج منفی و برای $x > 1$ علامت مخرج مثبت است. در اینجا باید توجه داشته باشیم که افاده کسری که در آن قیمت مخرج کسر صفر می شود تعریف نشده است.

بحث فوق را تحلیل و تعیین علامت را در جدول به شکل زیر خلاصه می کنیم:

x	$x < -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$3x + 5$	-	0	+		+
$2x - 2$	-		-	0	+
$\frac{3x+5}{2x-2}$	+	0	-	تعریف نشده	+

بنابر آن برای قیمت های $x < -\frac{5}{3}$ و $x > 1$ اشاره افاده کسری $\frac{3x+5}{2x-2}$ مثبت است و برای قیمت های $-\frac{5}{3} < x < 1$ اشاره افاده کسری $\frac{3x+5}{2x-2}$ منفی است. برای $x = -\frac{5}{3}$ افاده کسری صفر است.

برای $x = 1$ افاده کسری تعریف نشده است.

در حالت کلی برای تعیین اشاره یک افاده کسری ابتدا اشاره صورت و اشاره مخرج افاده کسری را تعیین می کنیم؛ سپس از حاصل تقسیم اشاره های صورت و مخرج اشاره افاده کسری را به دست می آوریم.

مثال: تغییر علامت افاده کسری $\frac{-x+3}{x}$ را در یک جدول تعیین و تحلیل کنید.

حل:

$$-x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x = 0$$

x		0		3	
$-x + 3$	+		+	0	-
x	-	0	+		+
$\frac{-x+3}{x}$	-	تعریف نشده	+	0	-

تمرین

اشاره افاده های کسری زیر را تعیین کنید.

a) $\frac{-x+1}{5+x}$

b) $\frac{x}{x+1}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{7}$

$$y = \frac{x + 1}{x}$$

$$y > 0 \quad ?$$

$$y < 0 \quad ?$$

آیا گفته می‌توانید برای کدام قیمت‌های x افاده کسری مقابل مثبت و برای کدام قیمت‌های x ، افاده کسری مقابل منفی است؟

فعالیت

نامساوات کسری $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ را در نظر بگیرید.

- برای برقراری نامساوی فوق صورت و مخرج افاده کسری چه علامتی باید داشته باشد؟
- برای کدام قیمت‌های متحول x ، صورت افاده کسری فوق مثبت است؟
- برای کدام قیمت‌های متحول x ، مخرج افاده کسری فوق مثبت است؟
- برای کدام قیمت‌های متحول x ، صورت افاده کسری فوق منفی است؟
- برای کدام قیمت‌های متحول x ، مخرج افاده کسری فوق منفی است؟
- با توجه به نتایج از فعالیت فوق، برای کدام قیمت‌های متحول x نامساوی $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ صحت است؟

در انجام فعالیت فوق مشاهده گردید که برای حل نامساوی $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ حالت‌های مختلفی را باید در نظر گرفت. یکی دیگر از راه‌های به دست آوردن ست حل‌های نامساوی کسری، تشکیل جدول تعیین علامت است. به طور مثال برای یافتن ست

$$\begin{array}{ll} \text{حل‌های نامساوی } \frac{x-2}{4+2x} > 0 \text{ طور زیر عمل می‌کنیم:} & \\ x-2=0 & \Rightarrow x=2 \\ 4+2x=0 & \Rightarrow x=-2 \end{array}$$

x	-2		2	
$x-2$	$-$		$-$	$+$
$4+2x$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x-2}{4+2x}$	$+$	تعریف نشده حل نامساوات	$-$	$+$ حل نامساوات

با توجه به جدول تحلیل و تعیین اشاره‌ها دیده می‌شود که برای قیمت‌های $(x < -2)$ و قیمت‌های $(x > 2)$ افاده کسری مثبت و برای قیمت‌های بزرگتر از -2 و کوچکتر از 2 ، $(-2 < x < 2)$ منفی است در نتیجه ست حل‌های نامساوی $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ عبارتند از:

$$\{x \in \mathbb{R} : x < -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} \quad \text{یا} \quad x > 2 \quad \text{و یا} \quad x < -2$$

$$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

مثال: نامساوات کسری $\frac{2x}{5x+3} \geq 1$ را حل کنید.

حل: جهت به دست آوردن ست حل نامساوات کسری ابتدا آن را به صورت یک افاده کسری کوچکتر یا بزرگتر از صفر به این گونه تغییر شکل می‌دهیم:

$$\frac{2x}{5x+3} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{5x+3} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2x - (5x+3)}{5x+3} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3x-3}{5x+3} \geq 0$$

$$-3x-3=0 \Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{5}$$

حال با تشکیل جدول تحلیل و تعیین علامت حل نامساوی را به دست می‌آوریم:

x	-1		$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	$+$	0	$-$	$-$
$5x+3$	$-$		0	$+$
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	$-$	0	$+$ حل نامساوات	$-$ تعریف نشده

بنابر این با توجه به جدول فوق ست حل‌های نامساوات عبارت است از: $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < -\frac{3}{5}\}$

در حالت کلی برای دریافت حل نامساوی‌های کسری طوری عمل می‌نماییم:

- اول نامساوی را طوری می‌نویسیم که کوچکتر یا بزرگتر از صفر باشد.

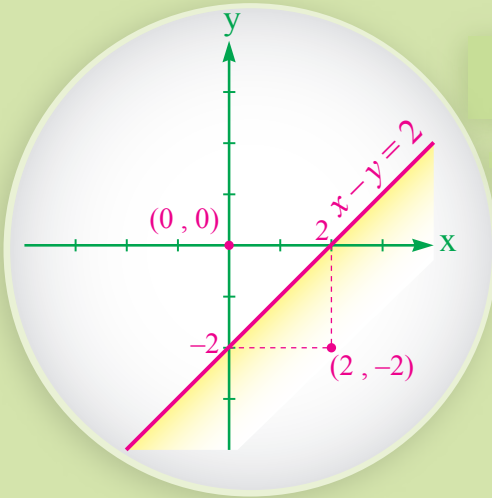
- با استفاده از جدول تحلیل و تعیین اشاره ست حل‌های نامساوی را به دست می‌آوریم.

تمرین

ست حل نامساوی‌های زیر را به دست آرید.

$$1) \frac{-x-9}{2x+4} < 0 \quad 2) \frac{6x+7}{7-6x} \leq 0 \quad 3) \frac{x+10}{2x-3} \geq 0 \quad 4) \frac{7x-2}{3-2x} > 3$$

نامساوات خطی دو متحوله



خط مستقیم $x - y = 2$ ، مستوی کمیات وضعیه را به دو ناحیه بالا و پایین تقسیم می کند.

مختصات نقاط کدام ناحیه در نامساوی $x - y < 2$ صدق می کند؟

نامساوی $x - y < 2$ که در آن دو متحول x و y با درجه یک وجود دارند یک نامساوی خطی دو متحوله خوانده می شود.

فعالیت

- جوړه مرتب (x, y) را طوری به دست آرید که در نامساوی $x - y < 2$ صدق کند.
- آیا می توانید جوړه دیگری به دست آرید که در نامساوی فوق صدق کند؟
- چه تعداد جوړه های مرتب وجود دارند که برای آنها نامساوی فوق صدق می کند؟

در حالت های فوق می گوییم که:

نامساوی $ax + by < c$ که در آن a, b و c اعداد حقیقی، $a \neq 0$ و $b \neq 0$ یک نامساوی خطی دو متحوله نامیده می شود.

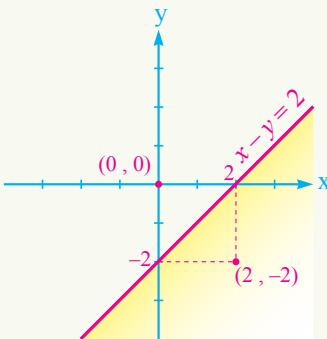
ست حل این نامساوات، جوړه های مرتب اعدادی اند که در نامساوی صدق می کنند.

مثال 1: ست حل نامساوی خطی دو متحوله

$x - y < 2$ را تعیین کنید.

حل: برای حل این نامساوی ابتدا خط $x - y = 2$

را در مستوی کمیات وضعیه رسم می کنیم دیده می شود که خط مستقیم $x - y = 2$ مستوی کمیات وضعیه را به دو ناحیه تقسیم می کند. جهت اینکه بدانیم جوړه های مرتب کدام ناحیه در نامساوی فوق صدق می کند از هر ناحیه یک جوړه مرتب انتخاب نموده در نامساوات قرار می دهیم.



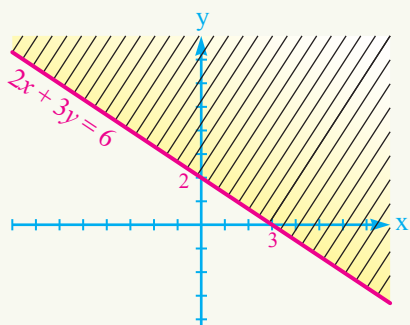
به طور مثال دیده می‌شود که جوړه مرتب $(0, 0)$ در نامساوی صدق می‌کند.
 $0 - 0 < 2 \Rightarrow 0 < 2$

ولی جوړه مرتب $(2, -2)$ در نامساوی صدق نمی‌کند:

$$2 - (-2) \not< 2$$

بنابراین نقاطی که در قسمت بالای خط مستقیم قرار دارند، حل های نامساوی اند.
 برای نمایش ست حل، آن طرف خط مستقیم را که در نامساوی صدق نمی‌کند مخطط می‌کنیم.

یادداشت: چند نقطه دیگری بالا و پایین خط مستقیم انتخاب کرده و نتیجه فوق را تحقیق کنید.



مثال 2: ست حل های نامساوی $2x + 3y < 6$ را به دست آرید.

حل: ابتدا خط مستقیم $2x + 3y = 6$ را در مستوی کمیات وضعیه رسم می‌کنیم. سپس ساحة حل را با وضع کردن مختصات یک نقطه بالا یا یک نقطه پایین خط تعیین می‌کنیم. اگر نقطه متذکره در نامساوات حقیقت داشت همان طرف خط حل نامساوی است و بالعکس آن حل نامساوی نیست.

طور مثال: جوړه مرتب $(0, 0)$ یعنی مبداء کمیات وضعیه را در نظر می‌گیریم:

$$2x + 3y < 6$$

چون مختصات نقطه متذکره در نامساوات صدق می‌کند؛ بنا بر این نقاطی که در قسمت پایین خط قرار دارند ست حل نامساوات اند.

$$2 \times (0) + 3 \times (0) < 6$$

$$0 < 6$$

تمرین

ست حل نامساوی های زیر را به دست آرید.

1) $3x - 2 < 5x + y$

2) $2y < 3x$

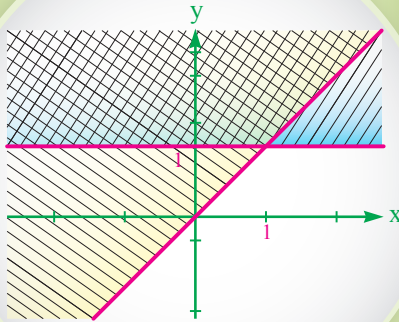
3) $x + y > 0$

4) $2x - 6y \geq 8x + 4y$

5) $x + y < 0$

6) $5x - 3y < -1$

سیستم نامساوی های خطی دو متحوله



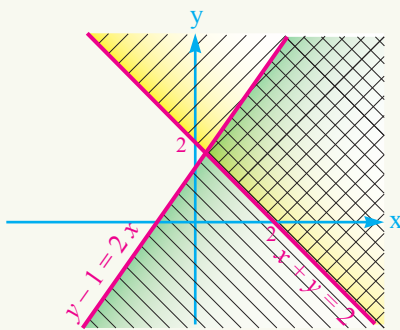
آیا می توانید حدس بزنید که شکل مقابل ناحیه حل های کدام نامساوی ها را نشان می دهد؟

سیستم نامساوی $\begin{cases} x+y < 2 \\ y-1 > 2x \end{cases}$ که در آن دو نامساوی خطی دو متحوله وجود دارد یک سیستم نامساوی گفته می شود.

منظور از حل سیستم نامساوی یافتن آن جوهره های مرتب است که همزمان در هر دو نامساوی صدق می کنند.

به طور مثال، برای حل سیستم $\begin{cases} x+y < 2 \\ y-1 > 2x \end{cases}$ به طور زیر عمل می کنیم:

ابتدا بعد از ترسیم خطوط ست حل هر یک از نامساوی ها را در مستوی کمیات وضعیه به دست می آوریم.



ناحیه یی که مشترکاً مخطط شده است، در Set حل همزمان نامساوات ها قرار دارد، این ناحیه حل سیستم نامساوی است.

برای ترسیم $x+y=2$ اگر $x=0$ باشد $y=2$ و اگر $y=0$ باشد $x=2$ می گردد.

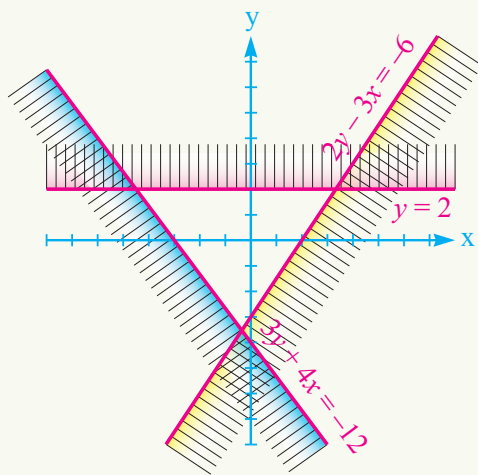
برای مستقیم $y-1=2x$ ، اگر $x=0$ باشد $y=1$ و اگر $y=0$ باشد $x=-\frac{1}{2}$ می گردد.

برای حل سیستم نامساوی خطی دو متحوله، طور زیر عمل می کنیم:
ابتدا ست حل هر یک از نامساوی های سیستم را در مستوی کمیات وضعیه تعیین می کنیم.
ناحیه یی که همزمان جزء ست حل هر دو نامساوی باشد حل سیستم است.

مثال: سیستم نامساوات زیر را حل نمایید:

$$\begin{cases} 2y - 3x > -6 \\ y - 2 < 0 \\ 3y + 4x > -12 \end{cases}$$

حل: ابتدا هر یک از خطوط نامساوی های فوق را رسم می کنیم یعنی خطوط:
 $3y + 4x = -12$ و $y - 2 = 0$, $2y - 3x = -6$
 برای ترسیم $2y - 3x = -6$ اگر $x = 0$ باشد $y = -3$ و برای ترسیم $y - 2 = 0$
 اگر $x = 0$ باشد $y = 2$ می گردد، و برای ترسیم مستقیم $3y + 4x = -12$
 اگر $x = 0$, $y = -4$ بوده با استفاده از قیمت های فوق، آن را طور زیر رسم می نمایم.



سپس ساحت حل هر یک از نامساوی ها را جدا جدا تحلیل و تعیین می نمایم.
 ست حل سیستم نامساوی های داده شده به صورت ناحیه یی که مخطط نیست در شکل
 ملاحظه شده می تواند.

تمرین

ست حل سیستم های زیر را توسط گراف به دست آرید:

1) $\begin{cases} x < 3 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x + 3y < 9 \\ 5x - 2y > 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x < 3 \\ y > 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 3y < -3 \\ 5x - 2y > 9 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y < 4 \\ x - y < 3 \\ 5x - y > 1 \end{cases}$

نکات مهم فصل پنجم

- برای تحلیل و تعیین نمودن اشارهٔ یک افادهٔ کسری اول اشارهٔ صورت و مخرج را جداگانه تعیین می‌نماییم؛ سپس حاصل تقسیم علامت‌ها را به دست می‌آوریم.
- برای حل سیستم نامساوی خطی دو متحوله طور زیر عمل می‌کنیم:
ابتدا ست حل هر یک از نامساوی‌های سیستم را در مستوی کمیات وضعیه تعیین می‌کنیم. ناحیه‌ی که همزمان جزء ست حل هر دو نامساوات باشد حل سیستم است.

تمرینات فصل پنجم

● در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- کدام یک از نامساوی‌های زیر صحیح است؟

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{6} \leq 2 - \frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$ c) $\sqrt{9+16} \geq 5$ d) هر سه درست اند.

2- کدام یک از ست‌های زیر ست حل نامساوی $x+3 \leq 5$ است؟

a) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 8\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$

3- کدام یک از انتروال‌های زیر حل نامساوات $2x+3 > -1$ است؟

a) $[-2, \infty)$ b) $(2, \infty)$ c) $(1, \infty)$ d) $(-2, \infty)$

4- کدام یک از انتروال‌های زیر ست حل $\frac{x+3}{3-x} > 0$ است؟

a) $(-3, 3)$ b) $(-\infty, 3)$ c) $(-3, \infty)$ d) $(-3, 3)$

● جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- در نامساوی $ax+b < 0$ ست همه که نامساوی را صدق کند به نام ست حل نامساوی فوق یاد می‌شود.

2- بینوم $2x+4$ برای قیمت‌های منفی می‌گردد.

3- بینوم $-x+\frac{1}{2}$ برای قیمت‌های مثبت می‌گردد.

4- ست حل نامساوی $2x+5 \leq \frac{1}{5}-x$ عبارت است از

● حل سیستم‌های نامساوی زیر را به دست آرید:

a) $\begin{cases} y > x \\ 3y < 2 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x+y < 2 \\ y-4 > 2x \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x-y > 0 \\ x-2y < 0 \end{cases}$	d) $\begin{cases} 2x+2y < 8 \\ 3x-3y < 9 \\ 10x-2y > 2 \end{cases}$

فصل ششم
معادلات یک مجهول
درجه دوم

$$x + 3$$



$$\rightarrow x + 2$$

شکل عمومی معادله یک مجهوله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

به شکل مقابل توجه کنید گفته می‌توانید
این شکل عمومی چه نوع معادله است؟
درجه آن چند است؟
حد ثابت کدام است؟
راجع به ضرایب a و b چه میدانید؟
آیا در این معادله $a = 0$ شده می‌تواند؟

فعالیت

یک معادله یک مجهوله درجه دوم ترتیب کنید طوری که:

- ضرایب a و b اعداد طبیعی باشند.
- حد ثابت آن یک عدد صفری باشد.

مثال 1: اگر $a = 2$, $b = -4$, و $c = \frac{7}{8}$ باشد معادله آن را بنویسید.

حل: می‌دانیم که شکل عمومی معادله یک مجهوله درجه دوم عبارت است از:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حال به عوض a , b , و c قیمت‌های آن‌ها را در معادله وضع نماییم معادله زیر تشکیل می‌شود:

$$2x^2 - 4x + \frac{7}{8} = 0$$

مثال 2: در معادله $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \sqrt{3} = 0$ قیمت‌های a , b , و c را نشان دهید.

حل:
 $c = \sqrt{3}$, $b = 3$, $a = \frac{1}{2}$

مثال 3: معادله درجه دوم یک مجهوله را تشکیل نمایید که قیمت های a, b, c در آن به ترتیب $2, -\sqrt{7}, \frac{1}{5}$ باشند.

حل:

$$-2x^2 - \sqrt{7}x + \frac{1}{5} = 0$$

تمرین

• معادلات زیر را تشکیل دهید.

1- $a = 0.5$, $b = 2.8$ و $c = 7.5$

2- $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$ و $c = \frac{6}{7}$

3- $a = 3$, $b = \sqrt{6}$ و $c = \frac{7}{8}$

• در معادلات زیر قیمت های a, b, c را نشان دهید.

(1) $4x^2 - 2x + 3 = 0$

(2) $\frac{2}{3}x^2 - 5 = 3x$

(3) $2x - \frac{1}{3}x^2 = \sqrt{\frac{7}{5}}$

طریقه حل معادله یک مجهوله درجه دوم که ضریب x در آن صفر باشد



$$ax^2 + c = 0$$

آیا گفته می‌توانید در شکل چه نوع

معادله را می‌بینید؟

این معادله با شکل عمومی یک معادله

یک مجهوله درجه دوم چه تفاوت

دارد؟

آیا این معادله را یک معادله مکمل

فعالیت

گفته می‌توانیم؟

- شکل عمومی معادله یک مجهوله درجه دوم را بنویسید.
- اگر در این معادله $b = 0$ باشد معادله کدام شکل را به خود می‌گیرد؟
- چطور می‌توان قیمت x را پیدا کرد.
- قیمت x چی را نشان می‌دهد. بیان کنید.

مثال 1: در معادله $2x^2 - 8 = 0$ قیمت x را دریابید.

حل:

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = +2$$

$$x_2 = -2$$

مثال 2: در معادله $\frac{1}{2}x^2 - 18 = 0$ قیمت x را دریابید.

حل:

$$\frac{1}{2}x^2 = 18$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

$$x_1 = +6$$

$$x_2 = -6$$

مثال 3: قیمت x را در معادله $\sqrt[3]{x^2} = 2$ دریابید.

حل:

$$\sqrt[3]{x^2} = 2$$

$$(\sqrt[3]{x^2})^3 = (2)^3$$

$$x^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8}$$

$$x = \sqrt{2 \cdot 4} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = +2\sqrt{2}$$

$$x_2 = -2\sqrt{2}$$

تمرین

قیمت x را در معادلات زیر به دست آورید.

1) $4x^2 - 8 = 0$

2) $3x^2 - 12 = 0$

3) $5x^2 - 75 = 0$

طریقه حل معادله یک مجهوله درجه دوم که حد ثابت آن صفر باشد

$$ax^2 + bx = 0$$

در شکل چه نوع معادله را می بینید؟
این معادله با شکل عمومی یک معادله
یک مجهوله درجه دوم چه تفاوت
دارد؟
آیا این معادله را یک معادله مکمل
گفته میتوانیم؟

فعالیت

- شکل عمومی یک معادله یک مجهوله درجه دوم را بنویسید.
- اگر در این معادله $c = 0$ باشد معادله کدام شکل را به خود می گیرد بنویسید.
- قیمت x در این نوع معادله چگونه دریافت می گردد؟
- قیمت x چقدر را نشان می دهد؟ بیان کنید.

مثال 1: در معادله $4x^2 - 8x = 0$ قیمت x را دریابید.

حل:

$$x(4x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$4x - 8 = 0$$

$$4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{4}$$

$$x_2 = 2$$

مثال 2: در معادله $\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$ قیمت x را دریابید.

حل:

$$x\left(\frac{1}{3}x - 2\right) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$\frac{1}{3}x - 2 = 0$$

$$\frac{1}{3}x = 2$$

$$x_2 = 6$$

مثال 3: معادله $x^2 + 4x = 0$ را حل کنید.

حل:

$$x(x + 4) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x + 4 = 0$$

$$x_2 = -4$$

تمرین

معادله های زیر را حل کنید.

1) $3x^2 - 5x = 0$

2) $5x^2 - 12.5x = 0$

3) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x = 0$

حل معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم که ضریب x و حد ثابت آن موجود باشد



$$ax^2 + bx + c = 0$$

در شکل چه نوع معادله را می بینید نام بگیرید:
دربارهٔ حل این معادله چي فکر می کنید؟
آیا گفته می توانید که این معادله دارای چند جذر است؟

فعالیت

- یک معادلهٔ یک مجهولهٔ درجه دوم را بنویسید که ضریب x و حد ثابت آن موجود باشد.
- اگر $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ باشد، قیمت های x_1 و x_2 را نظر به معادله یی که تحریر داشته اید دریافت کنید.
- قیمت های دریافت شدهٔ x_1 و x_2 را در اصل معادله وضع نمایید و ببینید که آیا معادله را صدق میکند یا خیر؟

مثال: قیمت های x_1 و x_2 را در معادلهٔ زیر به دست آرید:

$$-2x^2 - 3x + 2 = 0$$

حل: دیده می شود که: $c = 2, b = -3, a = -2$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{(-3)^2 - 4(-2 \cdot 2)}}{2(-2)} \\ &= \frac{3 + \sqrt{9 + 16}}{-4} = \frac{3 + \sqrt{25}}{-4} = \frac{3 + 5}{-4} = \frac{8}{-4} \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{(-3)^2 - 4(-2 \cdot 2)}}{2(-2)}$$

$$= \frac{9 - \sqrt{9 + 16}}{-4} = \frac{9 - \sqrt{25}}{-4} = \frac{9 - 5}{-4} = \frac{4}{-4}$$

$$x_2 = -1$$

تمرین

جذر معادلات زیر را به دست آورید.

1) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

2) $x^2 - 2x - 3 = 0$

3) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

حل معادلات یک مجهولۀ درجه دوم که دارای جذرهای مضاعف (مساوی) باشند

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 = x_2 = d$$

آیا گفته می‌توانید در شکل چه نوع معادله را می‌بینید نام بگیرید:

دربارهٔ جذور x_1 و x_2 چی فکر می‌کنید.

آیا معادلات یک مجهولۀ درجه دوم وجود دارد که دو جذر مساوی داشته باشد؟

فعالیت

- شکل عمومی یک معادلۀ یک مجهولۀ درجه دوم را بنویسید.
- اگر جذور این معادله $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ باشد، چی وقت x_1 مساوی x_2 می‌شود؟ بنویسید.
- اگر $+\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ و $-\sqrt{b^2 - 4ac} = 0$ شود قیمت‌های x_1 و x_2 را بنویسید.

مثال: جذرهای معادلۀ یک مجهولۀ درجه دوم زیر را به دست آرید:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

حل: در معادلۀ داده شدهٔ $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$ اند.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4^2 - 4(1 \cdot 4)}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{-4 + \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4 + \sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2} \\x_1 &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4^2 - 4(1 \cdot 4)}}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{-4 - \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4 - \sqrt{0}}{2} = \frac{-4}{2} \\
 x_2 &= -2
 \end{aligned}$$

تبصره: اگر در یک معادله، قیمت $b^2 - 4ac < 0$ یعنی Δ منفی باشد، معادلات در ست اعداد حقیقی جذر ندارند.

تمرین

جذور معادله های زیر را دریافت کنید.

- 1) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- 2) $3x^2 - 6x + 3 = 0$
- 3) $2x^2 - 8x + 8 = 0$

نکات مهم فصل ششم

- شکل عمومی هر معادله یک مجهول درجه دوم عبارت از $ax^2 + bx + c = 0$ بوده، طوری که $a \neq 0$ باشد.
- معادلاتی که شکل $ax^2 + c = 0$ و $ax^2 + bx = 0$ را دارند، به نام معادلات یک مجهول درجه دوم ناقص یاد میکنند.
- حل معادلات $ax^2 + bx = 0$ عبارت از: $x_1 = 0$ و $x_2 = -\frac{b}{a}$
- به صورت عمومی حل های هر معادله درجه دوم توسط فورمول $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می آید که $\Delta = b^2 - 4ac$ است.
- هرگاه $\Delta > 0$ باشد؛ معادله دو حل حقیقی دارد.
- هرگاه $\Delta = 0$ باشد؛ معادله دو حل مساوی دارد.
- هرگاه $\Delta < 0$ باشد؛ معادله در ست اعداد حقیقی جذر ندارد، جذر آن در ست اعداد موهومی می باشد.

تمرینات فصل ششم

● در سؤالات زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را انتخاب کنید.

1- در معادله $4x = 3x^2 - 1$ ضرایب a, b, c عبارت از:

الف) $a = 3, b = 4, c = 1$ ب) $a = -3, b = 4, c = +1$

ج) $a = 4, b = 3, c = -1$ د) هیچ کدام.

2- حل های معادله $3x^2 - 8x + 5 = 0$ عبارتند از:

الف) $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{3}$ ب) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 1$

ج) الف و ب د) هیچ کدام.

3- اگر $\Delta > 0$ باشد معادله:

الف) دو حل مساوی دارد. ب) معادله دو حل حقیقی و مختلف دارد.

ج) حل ندارد. د) یک حل دارد.

● جاهای خالی را پر کنید.

1- شکل عمومی معادلات یک مجهوله درجه دوم است.

2- اگر باشد معادله درجه دوم حل ندارد.

3- اگر درجه یک معادله (2) باشد معادله دارد.

● سؤالات زیر را بخوانید در مقابل سؤالات درست آن حرف (ص) و در مقابل سؤالات نادرست آن حرف (غ) بگذارید.

1- () اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد؛ معادله درست اعداد حقیقی حل ندارد.

2- () فورمول محمد بن موسی $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ است.

3- () در معادله $2x^2 - 4x = 0$ یک حل معادله صفر است.

● سؤال زیر را حل کنید.

1- در معادلات زیر ضرایب a, b, c را نشان دهید و بگویید که کدام آنها معادله

کامل و کدام آنها ناقص است؟

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $3x^2 - 1 = 0$

c) $2x^2 - 6x = 0$