



رياضي

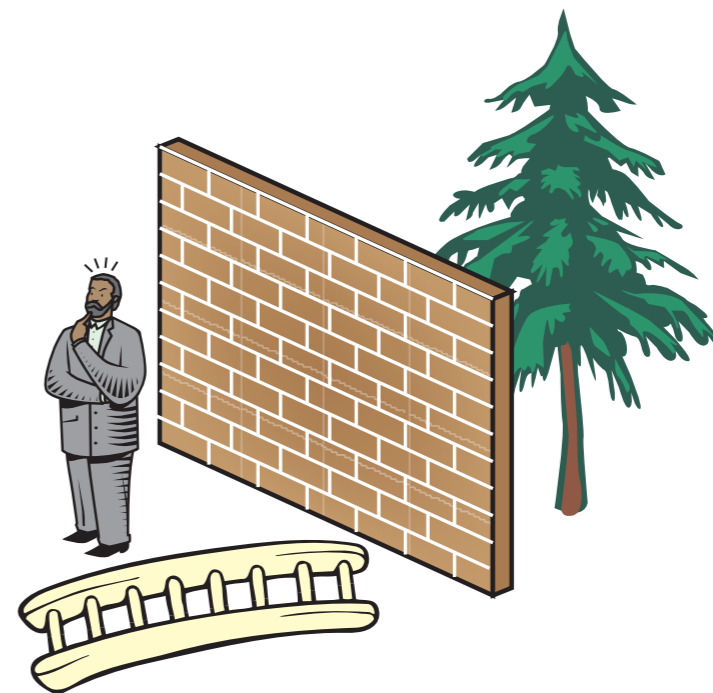
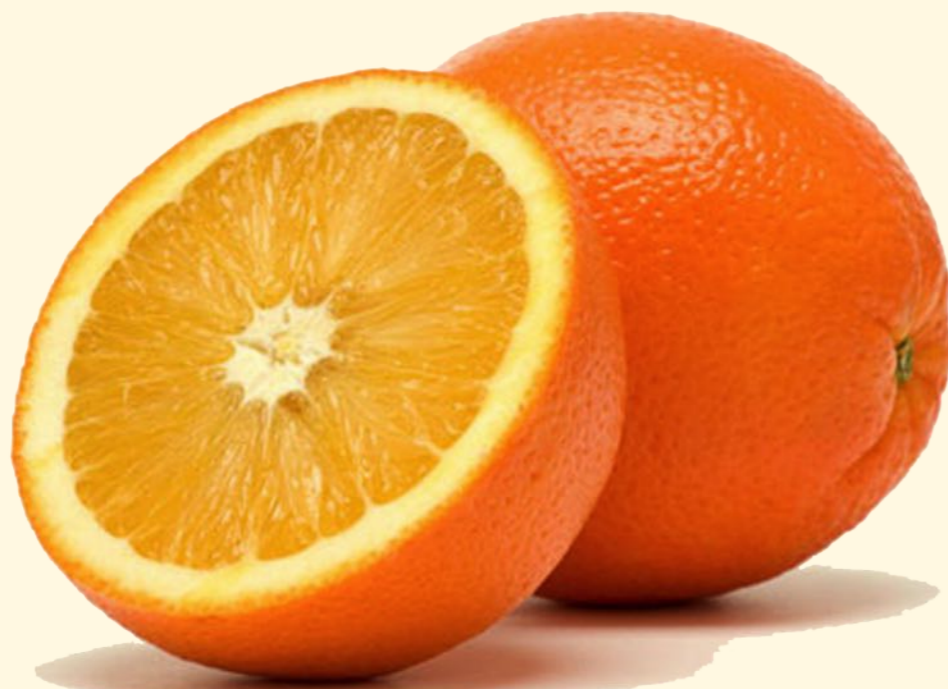
پنهم ټولگي



د افغانستان اسلامي جمهوريت
د پوهنې وزارت
د تعليمي نصاب د پراختيا لوي رياست

د ديني مدارسو لپاره

رياضي پنهم ټولگي (د ديني مدارسو لپاره)



کتابهای درسی مربوط وزارت معارف بوده، خرید و فروش آن ممنوع است.

curriculum@moe.gov.af

رياضي

نهم ٲولگى

(د ديني مدارسو لپاره)

۱۳۹۸

هـ . ش

مؤلفان

- سرمولف ميرنقيب الله د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف رياست علمي غړې
- مولف مهناز توخي د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف رياست علمي غړې
- د مولف مرستياله رحيمه هدايت زي د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف رياست علمي غړې

علمي ايډيټور

- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب په رياست کې.
- پوهنيار عبیدالله صافی د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړې

د ژبې ايډيټور

- محمد قدوس دکوخیل د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف رياست علمي غړې.

دیني، سياسي او فرهنگي کمیټه:

- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب په رياست کې.
- محمد اصف کوچی د دیني زده کړو د ډېپارټمنټ متخصص.

اشراف:

- دکتور شېرعلي ظريفی د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې رئیس.





ملي سرود

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه بان
لکه لمر پر شنه اسمان
لکه زړه وي جاویدان
وايو الله اکبر وایو الله اکبر

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلېږي
په سینه کې د اسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزیر پیغام

الحمد لله رب العالمين والصلوة والسلام على رسوله محمد و على آله و أصحابه آجمعين، أما بعد:

د پوهنې تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې د نظام بنسټ جوړوي او د هیواد د اوسنیو او راتلونکو نسلونو په علمي، فکري او سلوکي ودې او پراختیا کې بنسټیز او ارزښتمن رول لري.

تعلیمي نصاب باید د وخت په تېرېدو او د ژوندانه په بېلابېلو ډګرونو کې له بدلون او پرمختګ او د ټولنې له اړتیاوو سره سم، هم د مضمون او محتوا او هم د معلوماتو د ورکړې د لارو چارو له مخې، بدلون او پراختیا ومومي.

د تعلیمي نصاب په ډګر کې یو هم د اسلامي زده کړو نصاب دی چې بیا کتنې او ودې ته یې جدي اړتیا لیدل کېده؛ ځکه له یوې خوا باید د دیني مدرسو فارغان د ټولني د معنوي مخکښانو په توګه د معارف د هڅو د پوره پام وړ وګرځي او له بلې خوا د دیني مدرسو په نصاب کې د اسلام د سپېڅلي دین عقاید، احکام او لارښوونې راغلې دي چې د انساني ژوند د ټولو اړخونو بشپړ نظام او قانون او د نړۍ د خالق او پرودګار د وروستي پیغام په توګه د قیامت تر ورځې پورې، د بشریت د لارښوونې دنده سرته رسوي.

د اسلامي امت عالمانو د تاریخ په اوږدو کې د اسلامي معارف او د اسلامي تعلیماتو د سیستم په رامنځته کولو، پراختیا او بیا پیاوړتیا، په تېره بیا د اسلامي نړۍ د علمي مرکزونو او مؤسسو د تعلیمي نصاب په تدریجي وده کې، خپله دنده سرته رسولې ده.

د اسلامي علومو تاریخ ته کره کتنه، دا څرګندوي چې د دیني مدرسو او علمي مرکزونو نصاب تل د اسلام د تلپاتې او ثابتو احکامو پر بنسټ، د ټولنې له اړتیاوو سره سم، هر وخت او هر ځای پراختیا موندلې ده.

زموږ ګران هیواد افغانستان د علمي ځلانده تاریخ په درلودلو سره د علم او پوهې زانګو او د وخت لوی علمي مرکز و چې د اسلامي ستر تمدن په جوړښت کې یې مهم رول درلود. د علم او فرهنگ په مختلفو ډګرونو، په ځانګړې توګه د عقایدو، تفسیر، حدیث، فقهې او د فقهې د اصولو په څېر په شرعي علومو کې د زرګونو پوهانو او عالمانو شتون، زموږ ددې وینا پخلی کوي.

په اوسني عصر کې د اسلامي وینتابه له پراختیا سره سم زموږ په هیواد کې اسلامي زده کړو د څومره والي او څرنگوالي له مخې زیات بدلون موندلی او د هیواد کوچنیان او ځوانان په ډېره مینه او لیوالتیا د اسلامي زده کړو مرکزونو او مدرسو ته مخه کوي.

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت د خپل مسئولیت او دندې له مخې د هیواد له اساسي قانون سره سم د اسلامي زده کړو د کیفی او کمی پراختیا او په هغې کې د اسلامي زده کړو د نصاب په اړه د پام وړ ګامونه پورته کړي دي.

په دې لړ کې د پوهنې وزارت، د هیواد د ډاډ وړ تجربه لرونکو عالمانو، استادانو او متخصصانو څخه په بلنه د دیني مدرسو د تعلیمي نصاب، د لا ښه کولو لپاره، مروج کتابونه، د متنونو د شرحې او توضیح او د فعالیتونو، ارزونو او تمرینونو په ورزیاتولو د درسي کتابونو له نویو معیارونو سره سم چمتو کړل.

هیله من یم، د پوهنې وزارت د عالمانو او متخصصانو د ستاینې وړ دا هڅې، په افغانستان کې د اسلامي زده کړو د لا پراختیا او بیا پیاوړتیا او د لوی خدای جل جلاله د رضا د ترلاسه کولو لامل شي.

وبالله توفیق

دکتور محمد میرویس بلخي

د پوهنې وزیر

قدرمنو استادانو او گرانو زده کوونکو،

ریاضي چې د طبیعي علومو ژبه ده، د طبیعت قوانین د فورمولونو په شکل وړاندې کوي او په عددونو او مقدارونو پورې اړوند مسایل د حساب په ژبه بیانوي. وگرې په خپل ورځني ژوند کې دې علم ته اړتیا لري، د ساینسي علومو لپاره د کلي حیثیت لري، د طبیعت زیات قوانین د ریاضي د علم په ژبه بیانېږي، د ریاضي علم ته د شرعي مسایلو په حل کې هم اړتیا ده، د میراث د ویش، د ځمکو د وېش په مهال د هغو د مساحت پېژندل، د شریکانو د حقوقو پېژندل او په داسې نورو ډېرو برخو کې له ریاضي څخه کار اخیستل کېږي.

نو د دې لپاره چې زموږ د شرعي مدارسو فارغان اړینې وړتیاوې ولري، د ژوند ورځني مسایل چې په ریاضي پورې اړوند وي حل کړای شي، د میراث، مشارکت، د مالونو د وېش په مسایلو او د ساینسي مضامینو په محتوا وپوهېږي، د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت د تعلیمي نصاب د پراختیا عمومي ریاست، د ریاضي اړین مسایل د شرعي مدارسو په نصاب کې ځای په ځای کړل.

په دې توګه چې د دې برخې د زده کوونکو بنسټیزو اړتیاوو، راتلونکي تخصص او په تعلیمي پلان کې د ریاضي د مضمون لپاره ټاکل شوي وخت ته په پام کې د ریاضي د علم ضروري مسایل د نصاب لیکنې د معاصر فن په نظر کې نیولو سره په اسانو او اغېزمنو طریقو تالیف کړل، تر څو د شرعي مدارسو فارغان د دیني علومو تر څنګ ځینې اړین دنیوي علوم هم زده کړي، ظرفیتونه یې لوړ شي او په ټولنه کې د فعال ګټور او اغېزمن رول لوبولو لپاره وړتیاوې تر لاسه کړي.

د مطالبو فهرست

- **لومړۍ څپرکۍ: دایره، ۲۰-۳**
- د دایرې عناصر
- له دایرې سره د یو مستقیم خط حالتونه
- د دوو دایرو حالتونه
- د دایرې اړوند زاوې
- د دایرې محیطي زاویه
- د دایرې مماسي زاویه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- **دویم څپرکۍ: د دایرې او مستقیمو کرښو تر منځ اړیکې، ۲۱-۴۴**
- د یوې نقطې طاقت نظر یوې دایرې ته
- پر دایره مماس مستقیم خط
- د دایرې داخلي زاویه
- د دایرې خارجي زاویه
- محیطي دایره
- محاطي دایره
- د یوې منظمې مضلعې رسمول
- د د ایرې محیط او مساحت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- **دریم څپرکۍ: تحلیلي هندسه، ۴۵-۶۲**
- د دوو نقطو تر منځ فاصله
- د مستقیم خط میل
- د موازي مستقیمو خطونو میل
- د عمودو خطونو میل
- د هغه مستقیم خط میل چې دوی نقطې یې معلومې وي
- د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- **څلورم څپرکۍ: مثلثات، ۶۳-۷۶**
- د یوې حاده زاوې سین
- د یوې حاده زاوې کوساین
- د یوې حاده زاوې تانجانټ
- د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- **پنځم څپرکۍ: الجبري افادې، ۷۷-۹۲**
- د الجبري افادو ضرب
- د مکعبونو مجموعه او تفاضل
- د الجبري افادو وېش
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- **شپږم څپرکۍ: غیر مساوات، ۹۳-۱۰۶**
- د یو مجهوله خطي غیر مساواتونو حل
- انټروالونه
- د لومړۍ درجې دوه حده (باينوم) د علامو ټاکل
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- **اووم څپرکۍ: دویمه درجه یو مجهوله معادلې، ۱۰۷-۱۲۰**
- د یو مجهوله دویمې درجې معادلو حل
- د تکمیل مربع په طریقه د دویمې درجې معادلې حل
- د محمد بن موسی فورمول
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

لومپری خپرکی
دایره





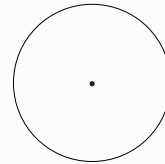
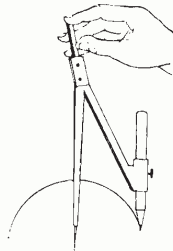
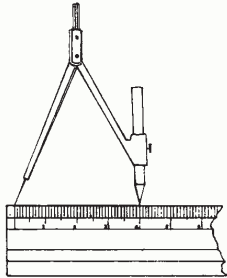


دایره CIRCLE

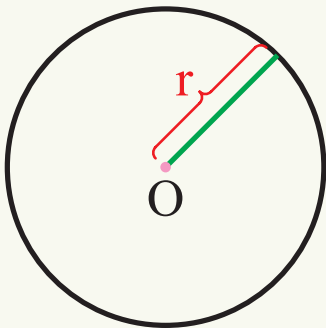
شکل ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په تصویر کې لیدل کېږي نومونه یې واخلي.

فعالیت

یوه نقطه د کاغذ پر مخ وټاکئ، د پرکار ستن پر نقطه کېږدئ او خوله یې د 4cm په اندازه خلاصه او ددې نقطې پر شاوخوا یو مکمل دوران ورکړئ، جوړ شوی شکل او ټاکل شوې نقطه څه نومېږي؟

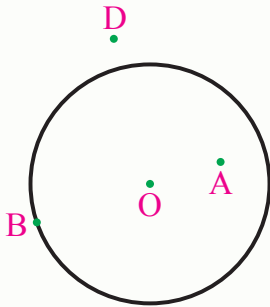


تعریف



د یوې مستوي د ټولو هغو نقطو سټ چې له یوې ثابتې نقطې څخه مساوي فاصله ولري، دایره نومېږي. یا په بل عبارت دایره یو تړلی منحنی خط دی چې له یوې ثابتې نقطې څخه مساوي فاصله ولري. تړلی منحنی ته د دایرې محیط او ثابتې نقطې ته د دایرې مرکز وایي چې په $C(O, r)$ سره ښودل کېږي. د دایرې مرکز د O او شعاع یې د r په توري ښودل کېږي.

فعالیت



• په مخامخ شکل کې د A, B او D نقطو موقعیت نظر د O دایرې ته وټاکئ.

• د دې نقطو فاصله د دایرې له مرکز څخه پیدا کړئ او د شعاع له اوږدوالي سره یې پرتله کړئ.

• نورې درې اختیاري نقطې، یوه یې د دایرې په داخل کې، بله یې د دایرې پر محیط او دریمه نقطه یې له دایرې څخه د باندې په پام کې ونیسئ، ایا لاس ته راغلی اړیکې ددې نقطو لپاره هم سمې دي؟

ډپورټني فعالیت د سرته رسولو په نتیجه کې لاندې پایلې لاس ته راځي:

1- د هغو نقطو سټ چې د دایرې له مرکز څخه یې فاصله د دایرې د شعاع له اوږدوالي څخه کوچنی وي د دایرې د داخلي ساحې، نقطې ورته وايي.

2- د هغو نقطو سټ چې د دایرې له مرکز څخه یې فاصله د دایرې د شعاع له اوږدوالي سره برابره وي، د دایرې د محیط نقطې ورته وايي.

3- د هغو نقطو سټ چې د دایرې له مرکز څخه یې فاصله د دایرې له شعاع څخه لویه وي د دایرې د خارجي ساحې نقطې ورته وايي.

4- د مستوي هغه برخه چې د محیط او د دایرې د داخلي سطحې په واسطه جلا شوی وي د دایرې د سطحې په نامه یادېږي.

پوښتنې

1- د 2cm په شعاع یوه دایره رسم کړئ له لاندې نقطو څخه کومه یوه یې د دایرې په داخل، کومه

یوه د دایرې د باندې او کومه نقطه د دایرې پر مخ واقع ده؟

• د دایرې له مرکز څخه د A د نقطې فاصله 1.4cm ده.

• د دایرې له مرکز څخه د B د نقطې فاصله 2.3cm ده.

• د دایرې له مرکز څخه د C د نقطې فاصله صفر ده.

• د دایرې له مرکز څخه د D د نقطې فاصله $\frac{4}{2}\text{cm}$ ده.

2- په کوم حالت کې یو نقطه د دایرې پر محیط پرتله وي؟

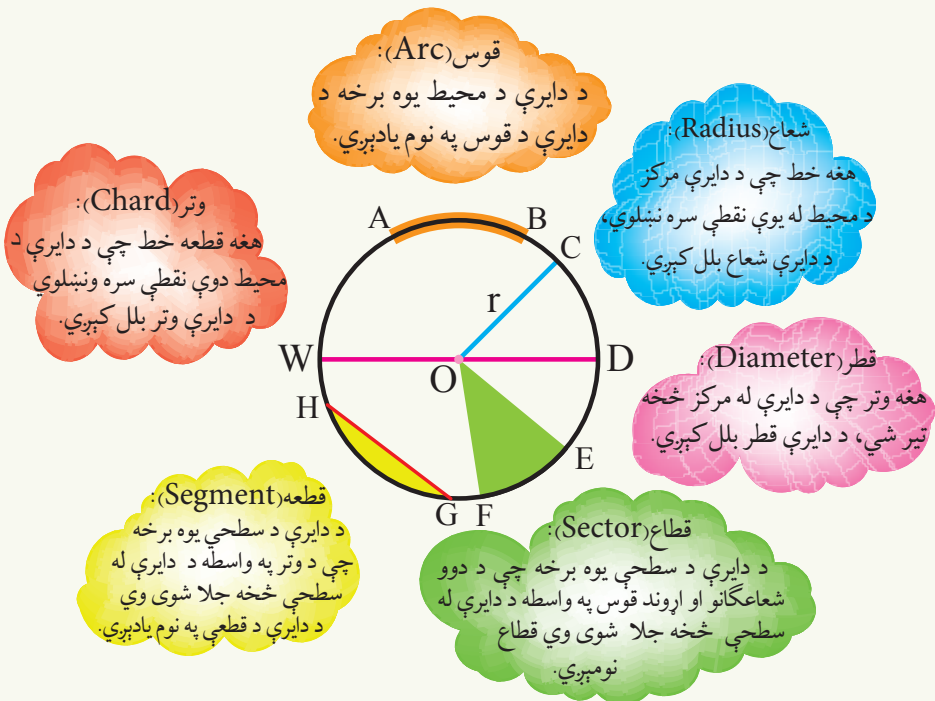
د دایرې عناصر (Elements of a Circle)



شکل ته پام وکړئ د کیک مخ کوم هندسي شکل لري؟ او پرې شوې برخه یې د دایرې کوم عنصر رابښي؟

تعریف

لاندې تعریفونه د شکل له اړونده عناصرو سره په خپلو کتابچو کې ونښلئ.



فعالیت

- یوه دایره د 4 cm په شعاع رسم او له کاغذ څخه یې پرې کړئ.
- دا دایره داسې قات کړئ چې دواړه نیمې دایرې یو پر بل منطبق شي.
- کاغذ خلاص کړئ د کاغذ پر مخ کوم خط چې له قات کېدو څخه جوړ شوی دی، د څه ه نامه یادېږي؟
- دا ځل دوه نیمې دایرې بیا قات کړئ چې څلور مساوي برخې جوړې شي. څو قطعه خطونه وینئ، هر قطعه خط د څه په نامه یادېږي؟
- څلور جوړې شوي زاوېې اندازه کړئ او وویاست چې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟
- د دایرې د قطر او شعاع ترمنځ کومه اړیکه ده؟
- دایره داسې قات کړئ چې دوې نامساوي برخې ورڅخه جوړې شي، کاغذ خلاص کړئ، جوړ شوی خط د څه په نامه یادېږي؟ ددې خط اوږدوالی د دایرې له قطر سره پرتله کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

- لکه څرنګه چې ومولیدل که چیرې د هرې دایرې د محیط دوې نقطې یوه له بلې سره ونښلوو، د دایرې وتر جوړېږي.
- په هره دایره کې تر ټولو لوی وتر، د دایرې قطر دی چې اوږدوالی یې د شعاع د اوږدوالي دوه برابره دی.
- په یوه دایره کې هر قطر وتر دی، لیکن هر وتر قطر نه دی.
- "هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمايي څخه کوچنی وي، د کوچني قوس (minor Arc) په نوم یادېږي.
- "هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمايي څخه لوی وي، د لوی قوس (major Arc) په نوم یادېږي.

پوښتنې

- 1- د O په مرکز یوه داسې دایره رسم کړئ چې د شعاع اوږدوالی یې 4 واحد وي یا $C(0, 4)$ دایره رسم کړئ.
- a) په شکل کې د دایرې شعاع، قطر، قطعه او قطاع وښیئ.
- b) د دایرې د قطر اوږدوالی پیدا کړئ.
- c) د دایرې محیط په څلور مساوي برخو وویشئ څه نتیجه به ترې واخلي؟
- d) د دایرې داخلي ناحیه، خارجي ناحیه او د دایرې محیط د مختلفو رنګونو په واسطه وښیئ.

له دایرې سره د یوه مستقیم خط حالتونه

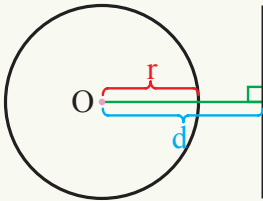


شکل ته وگورئ او وویاست چې قلمونه او هندسي بکس له دایرې سره په کومو حالتونو کې واقع دي، هر حالت یې توضیح کړئ.

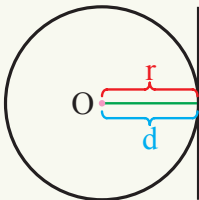
فعالیت

- یوه دایره رسم کړئ او یو داسې مستقیم خط رسم کړئ چې له دایرې سره یوه مشترکه نقطه ولري، بل داسې مستقیم خط رسم کړئ چې له دایرې سره دوې مشترکې نقطې ولري او داسې مستقیم خط رسم کړئ چې له دایرې سره هیڅ شریکه نقطه ونه لري.
- د دایرې له مرکز څخه پر هر یوه مستقیم خط باندې عمود خطونه رسم کړئ او د دایرې له مرکز څخه د هر مستقیم خط فاصله د دایرې د شعاع له اوږدوالي سره پرتله کړئ.

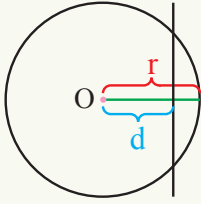
د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لیدل کېږي چې یو مستقیم خط او دایره نظر یو بل ته لاندې درې حالتونه لري:



۱- که د Δ مستقیم خط له دایرې سره شریکه نقطه ونلري، نو مستقیم خط له دایرې څخه د باندې واقع دی، د دایرې له مرکز څخه د مستقیم خط فاصله (d) د دایرې د شعاع (r) له اوږدوالي څخه زیاته ده یا $d > r$

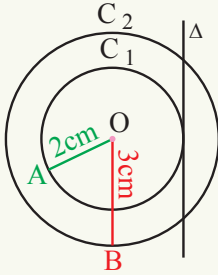


۲- که چېرې د Δ مستقیم خط له دایرې سره یوه شریکه نقطه ولري، نو دې مستقیم خط ته پر دایره مماس وایي، په دې حالت کې د دایرې له مرکز څخه د مستقیم خط فاصله د دایرې له شعاع سره برابره ده یا $d = r$



3- که چیرې د Δ مستقیم خط له یوې دایرې سره دوې مشترکې نقطې ولري، دې مستقیم خط ته قاطع خط وایي او په دې حالت کې د دایرې له مرکز څخه د مستقیم خط فاصله د دایرې د شعاع له اوږدوالي څخه کوچنی ده یا $d < r$

مثال: د O نقطه د دایرې د مرکز په توګه په پام کې ونیسئ، د O په مرکز په ترتیب سره د ۲ او ۳ سانتی مترو په شعاع د C_1 او C_2 دوې متحدالمرکز دایرې رسم کړئ. د دایرو له مرکز څخه د Δ د مستقیم خط فاصله د C_1 او C_2 دایرو د شعاعګانو له اوږدوالو سره څه اړیکه لري؟



حل: په شکل کې لیدل کېږي چې:

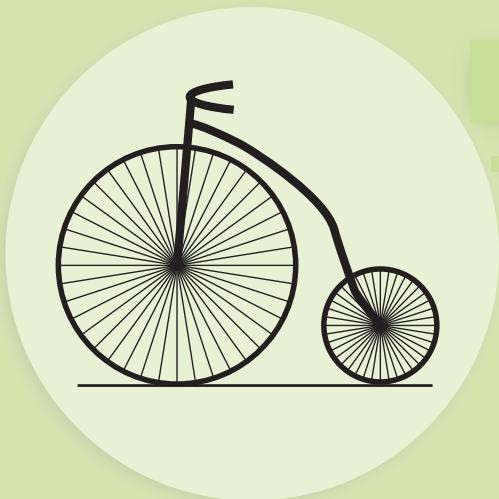
د C_1 دایرې له مرکز څخه د Δ د مستقیم خط فاصله د دایرې د شعاع له اوږدوالي سره برابره ده؛ یعنې $d = r$

د C_2 دایرې له مرکز څخه د Δ د مستقیم خط فاصله د دایرې د شعاع له اوږدوالي څخه کوچنی ده؛ یعنې $d < r$

پوښتنې

- 1- د $3cm$ په شعاع یوه دایره رسم کړئ، په لاندې راکړل شوو فاصلو مستقیم خطونه رسم او ددې مستقیمو خطونو حالتونه ووايي.
 - الف: که د دایرې له مرکز څخه د مستقیم خط فاصله $2.5cm$ وي.
 - ب: که د دایرې له مرکز څخه د مستقیم خط فاصله $4cm$ وي.
 - ج: که د دایرې له مرکز څخه د مستقیم خط فاصله د دایرې له شعاع سره برابره وي.

د دوو دایرو حالتونه



شکل ته وگورئ او وویاست:

1- د بایسکل ټایرونه کوم هندسي شکل

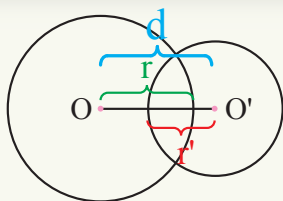
لري؟

2- ټایرونه نظر یو بل ته څو حالتونه غوره

کولای شي؟ توضیح یې کړئ.

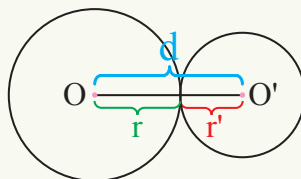
فعالیت

- دوې دایرې داسې رسم کړئ چې:
 - 1: یوه له بلې سره یوه مشترکه نقطه ولري.
 - 2: یوه دایره له بلې دایرې سره دوې مشترکې نقطې ولري.
 - 3: یوه دایره له بلې سره شریکه نقطه ونلري.
- په پورتنیو حالتونو کې د دایرو د مرکزونو تر منځ فاصلې د دایرو د شعاعگانو له اوږدوالو سره پرتله کړئ.



که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ فاصله (d) د دایرو شعاعگانو د اوږدوالو له مجموعې څخه کوچنی او د شعاعگانو د تفاضل د مطلقه قیمت څخه لویه وي، نو دایرې سره متقاطع دي؛ یعنې:

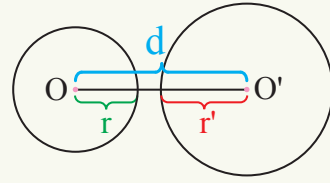
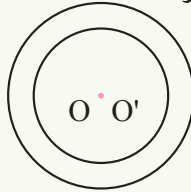
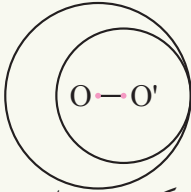
$$|r - r'| < d < r + r'$$



که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ فاصله (d) د دایرو د شعاعگانو د اوږدوالو له مجموعې سره مساوي وي، په دې حالت کې دایرو ته خارجاً مماسي دایرې وایي؛ یعنې:

$$d = r + r'$$

همدارنگه:



که د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ فاصله د دایرو د شعاعگانو د اوږدوالو د تفاضل له مطلقه قیمت سره مساوي وي، داسې دایرې داخلا مماسي دایرې دي؛
یعني $d = |r - r'|$

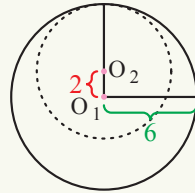
که د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ فاصله صفر وي، داسې دایرې د متحد المركز دایرو په نامه یادېږي،
یعني: $d = 0$

که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ فاصله (d)، د دایرو شعاعگانو د اوږدوالو له مجموعې څخه زیاته وي، په دې حالت کې دایرو ته غیر متقاطع دایرې وايي؛ یعني:
 $d > r + r'$

مثال: دوې دایرې داسې رسم کړئ چې د لومړې دایرې شعاع 6 واحدو او د دویمې دایرې د شعاع اوږدوالی د لومړې دایرې د شعاع له اوږدوالی $\frac{2}{3}$ برابره وي، که د دواړو دایرو د مرکزونو تر منځ فاصله 2 واحدو وي، نو په دې صورت کې دا دواړه دایرې یوه نسبت بلې ته په کوم حالت کې دي؟

حل: که د لومړنۍ دایرې شعاع r_1 او د دویمې دایرې شعاع r_2 ونوموو، نو لرو:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= 6 \text{ unit} \\ r_2 &= \frac{2}{3} r_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} r_2 &= \frac{2}{3} \cdot 6 \text{ unit} \\ r_2 &= 4 \text{ unit} \end{aligned}$$



څرنګه چې: $d = |r_1 - r_2| = |6 - 4| = |2| = 2$

نو دا دواړه دایرې داخلا سره مماس دي.

پوښتنې

۱- د 6 cm او 4 cm په شعاعگانو دوې دایرې په پام کې ونیسئ او په لاندې توګه یې رسم کړئ.

ب: دایرې یوه له بلې سره داخلا مماس وي.

د: دایرې سره غیر متقاطع وي.

و: پورتنی حالتونه په خپله ژبه ووايي.

الف: دایرې خارجاً مماس دي.

ج: دایرې سره متقاطع وي.

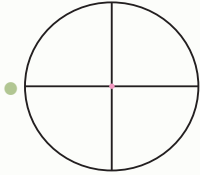
ه: دایرې سره متحد المركز وي.

د دایرې اړونده زاویې (Angles of a Circle)



شکل ته وگورئ هغه هندسي شکلونه چې په کې لیدل کېږي، نومونه یې واخلي.

فعالیت

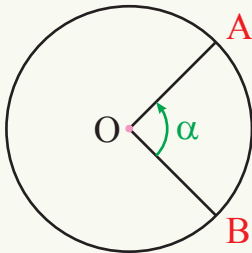


- په پورتنی شکل کې څو زاویې لیدل کېږي؟
- وویاست چې ددې زاویو مشترک خاصیتونه کوم دي؟ یوه کیفیت (اختیاري) دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یو پر بل دوه عمود قطرونه رسم کړئ.
- څو مرکزي زاویې جوړېږي؟ د هرې زاویې د مقابل قوس اندازه څو درجې ده؟
- د دې دایرې محیط څو درجې دی؟

دپورتنی فعالیت له پایلې څخه لیکلای شو چې:
د یو قوس اوږدوالی د مرکزي زاویې په پراخوالي پورې اړه لري، یعنې:

$$\frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دایرې محیط}} = \frac{\hat{A}OB}{360^\circ}$$

تعریف



هغه زاویه چې راس یې د دایرې په مرکز کې او ضلعي یې د دایرې شعاعگانې وي، مرکزي زاویه بلل کېږي لکه: د $\hat{A}OB$ یا د $\hat{\alpha}$

زاویه:

د هرې مرکزي زاوېې ضلعې د دايرې له محيط څخه يو قوس جلا کوي چې دا قوس له مرکزي زاوېې سره مساوي دی، لکه د \widehat{AB} قوس چې د α له زاوېې سره مساوي دي. نو ويلاى شو چې په يوه دايره کې د مرکزي زاوېې د مقابل قوس اندازه د درجې په حساب له مرکزي زاوېې سره مساوي ده، يعنې: $\widehat{AOB} = \widehat{AB} = \alpha$

مثال: که د $C(O, r)$ په دايره کې لوی قوس (major Arc) د کوچني قوس (minor Arc) پنځه برابره وي، نو کوچنی قوس، لوی قوس او د دې قوسونو د مقابلو زاويو اندازه پيدا کړئ.

حل: که کوچنی قوس $\widehat{PQ}_{\text{minor}} = x$ وي، نو لوی قوس يې $\widehat{PQ}_{\text{major}} = 360^\circ - x$ دی، نو ليکلای شو، چې:

$$\widehat{PQ} + \widehat{PAQ} = 360^\circ$$

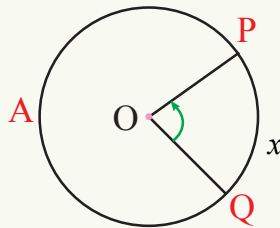
$$\widehat{PAQ}_{\text{maj}} = 5\widehat{PQ}_{\text{min}}$$

$$x + 5x = 360^\circ$$

$$6x = 360^\circ$$

$$x = 60^\circ \Rightarrow \widehat{POQ} = x = 60^\circ$$

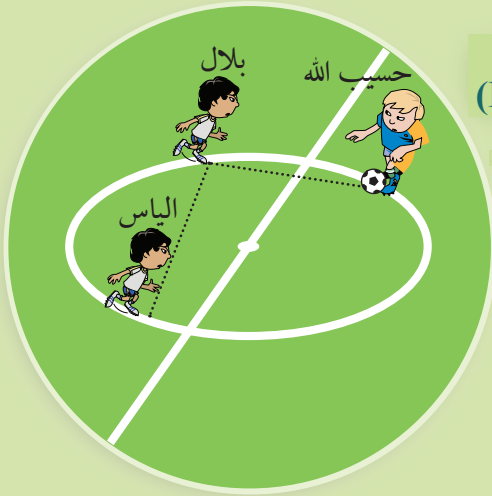
$$\widehat{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$$



پوښتنې

که د A, B او C درې نقطې د $C(O, r)$ د دايرې پر محيط داسې پرتې وي چې $\widehat{AOB} = 75^\circ$ او $\widehat{BOC} = 136^\circ$ زاوېې د OB د خط دواړو خواوو ته پرتې وي، د AC د قوس اندازه پيدا کړئ.

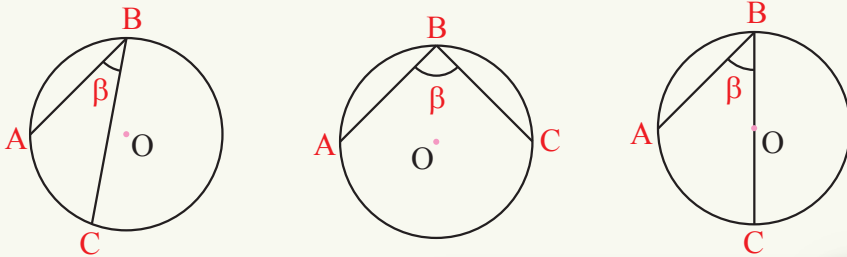
د دایرې محیطي زاویه (Inscribed Angel of Circle)



په مخامخ شکل کې د فوټبال د میدان په مرکزي دایره باندې حسیب الله بلال ته او بلال الیاس ته توپ پاس کوي، هغه شکل چې د توپ د پاس کولو له مسیر څخه جوړېږي، څه نومېږي؟

تعریف

هغه زاویه چې راس یې د دایرې پر محیط او ضلعې یې د دایرې دوه وترونه وي، محیطي زاویه بلل کېږي، لکه په لاندینو شکلونو کې د \hat{ABC} یا د $\hat{\beta}$ زاویه.



فعالیت

• د $C(O, r)$ په دایره کې د \hat{ABC} محیطي زاویه داسې رسم کړئ چې د \overline{BC} ضلع یې د دایرې پر قطر واقع وي.

• د A نقطه د دایرې له مرکز (O) سره ونښلوئ، څه ډول مثلث جوړېږي.

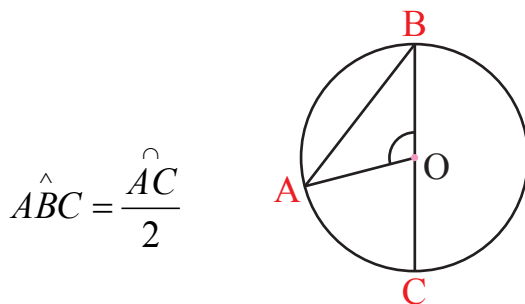
• د OAB په مثلث د \hat{A} او \hat{B} زاویې یوه له بلې سره څه اړیکه

لري؟

• د \hat{AOC} زاویه او د \hat{A} او \hat{B} زاویې په کومو نومونو یادېږي؟

په یاد ولرئ چې:
• د مرکزي زاویې پراخوالی له خپل مخامخ قوس سره مساوي دی.

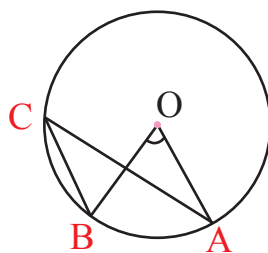
کولای شو د دې فعالیت پایلې په لاندې ډول بیان کړو:
 د هرې محیطي زاوېې پراخوالی د دې زاوېې د مقابل قوس له نیمایي سره برابر دی.



یا د \hat{ABC} د محیطي زاوېې پراخوالی له $\frac{1}{2}\hat{AC}$ سره برابر دی.
مثال: د $C(O, r)$ دایره کې که د \hat{AOB} مرکزي زاویه 60° وي ($\hat{AOB} = 60^\circ$) د \hat{AB} د قوس اوږدوالی او د \hat{ACB} د محیطي زاوېې پراخوالی پیدا کړئ.
حل: په یوه دایره کې د مرکزي زاوېې او د هغې د مخامخ قوس ترمنځ له اړیکې څخه لیکلی شو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{AOB} = 60^\circ \\ \hat{AOB} = \hat{AB} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{AB} = 60^\circ$$

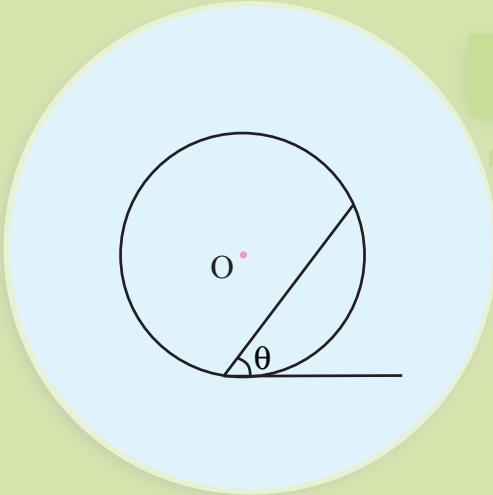
$$\left. \begin{array}{l} \hat{ACB} = \frac{\hat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{ACB} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



پوښتنې

- ۱- په یوه دایره کې د 90° په پراخوالی یوه محیطي زاویه رسم کړئ.
- ۲- د دایرې پر محیط د A او B دوې نقطې په پام کې ونیسئ. د \hat{AB} د قوس په مقابل کې، څو مساوي محیطي زاوېې شته دي؟

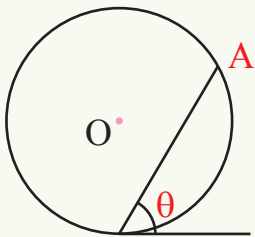
د دایرې مماسي زاویه



شکل ته پام وکړئ، هغه مستقیم خطونه چې د θ زاویه یې جوړه کړې ده څه نومېږي؟

ووایاست چې د زاویې راس د دایرې په کومه برخه کې واقع دی؟

تعریف



هغه زاویه چې یوه ضلعه یې پر دایره مماس او بله ضلعه یې د دایرې وتر وي او راس یې د تماس په نقطه کې وي مماسي زاویه بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل کې د θ زاویه.

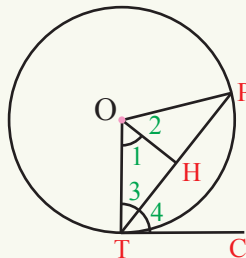
فعالیت

- د $C(O, 6)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره باندې یوه مماسي زاویه رسم کړئ.
- د دایرې د وتر انجانونه د دایرې له مرکز سره ونښلوئ او ووايئ څه ډول مثلث جوړېږي؟
- د دایرې له مرکز څخه پر وتر یو عمود رسم کړئ.
- د مرکزي زاویې او د مماسي زاویې پراخوالی یو له بل سره پرتله کړئ.

د پورتنی فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

په یوه دایره کې د مماسي زاویې پراخوالی د هغې د مقابل قوس له نیمايي سره برابر دی.

$$\widehat{PTC} = \frac{\widehat{PT}}{2}$$



لومړی مثال: که د $C(O, r)$ د دایرې په لاندې شکل کې \widehat{AOB} مرکزي زاویه 45° وي، د محیطي او مماسي زاویو پراخوالی پیدا کړئ.

حل: د مرکزي زاویې او د هغې د مقابل قوس تر منځ د اړیکې په مرسته لیکلی شو چې:

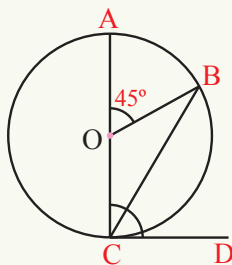
$$\widehat{AOB} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = 45^\circ$$

$$\widehat{BOC} = 180^\circ - 45^\circ$$

$$\widehat{BOC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 135^\circ$$

$$\widehat{BCD} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$



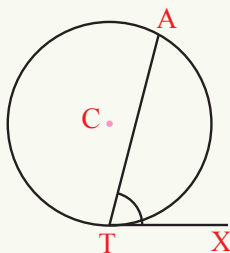
دویم مثال: په لاندې شکل کې د \widehat{AT} قوس اندازه $(2\alpha - 6)^\circ$ ده، د ATX د مماسي زاویې پراخوالی پیدا کړئ.

حل: د مماسي زاویې او د هغې د مخامخ قوس د اړیکې په مرسته لیکلای شو، چې:

$$\widehat{ATX} = \frac{1}{2} \widehat{AT}$$

$$\widehat{ATX} = \frac{1}{2} (2\alpha - 6)^\circ$$

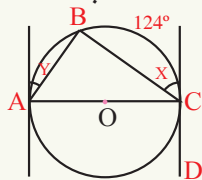
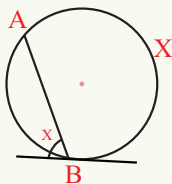
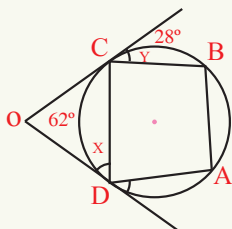
$$= (\alpha - 3)^\circ$$



محیطي او مماسي زاویې چې د عین قوس په مقابل کې پرتې وي، یوه له بلې سره مساوي دي. مماسي زاویه د مقابل قوس نیمایي ده.

پوښتنې

په لاندینيو شکلونو کې د مماسي زاویو پراخوالی په لاس راوړئ.



د لومړي څپرکي لنډيز

- **دايره:** د يوې مستوي د ټولو هغو نقطو سټ چې له يوې ثابتې نقطې څخه مساوي فاصله ولري دايره بلل کېږي.
- د ټولو هغو نقطو سټ چې د دايرې له مرکز څخه يې فاصله د دايرې د شعاع له اوږدوالي څخه کوچنۍ وي، د دايرې د داخلي ساحې نقطې ورته وايي.
- د ټولو هغو نقطو سټ چې د دايرې له مرکز څخه يې فاصله د دايرې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي، د دايرې د محيط نقطې بلل کېږي.
- د ټولو هغو نقطو سټ چې فاصله يې د دايرې له مرکز څخه د شعاع له اوږدوالي څخه زياته وي، د دايرې د خارجي ساحې نقطې بلل کېږي.
- د مستوي هغه برخه چې د دايرې د محيط په واسطه محدوده شوي وي د دايرې سطحه بلل کېږي.
- **د دايرې شعاع:** هغه مستقيم خط چې د دايرې مرکز د دايرې د محيط له يوې نقطې سره نښلوي، د دايرې شعاع بلل کېږي.
- **د دايرې وتر:** هغه قطعه خط چې د دايرې د محيط دوه نقطې سره نښلوي، د دايرې وتر بلل کېږي.
- **د دايرې قطر:** د دايرې هغه وتر چې د دايرې له مرکز څخه تيرېږي، د دايرې د قطر په نامه يادېږي.
- **د دايرې قوس:** د دايرې د محيط يوه برخه د دايرې د قوس په نامه يادېږي.
- **د دايرې مماس:** هغه مستقيم خط چې له دايرې سره يوازې يوه مشترکه نقطه ولري، د دايرې د مماس په نامه يادېږي.
- **د دايرې قطعه:** د دايرې د سطحې يوه برخه ده چې د وتر په واسطه د دايرې له سطحې څخه جلا شوي وي.
- **د دايرې قطاع:** د دايرې د سطحې يوه برخه ده چې د دوو شعاعگانو او اړونده قوس په واسطه د دايرې له سطحې څخه جلا شوي وي.
- که يو مستقيم خط له يوې دايرې سره يوه مشترکه نقطه ولري د مماس او که دوه مشترکې نقطې ولري، د قطاع په نامه يادېږي.
- **مرکزي زاويه:** هغه زاويه چې راس يې د دايرې په مرکز کې او ضلعي يې د دايرې

شعاعگانې وي، د مرکزي زاویې په نامه یادېږي.

- د هرې مرکزي زاویې پراخوالی د هغې له مقابل قوس سره مساوي دی.
- د $\hat{A}OB$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $\frac{\hat{A}OB}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دایرې محیط}}$ له رابطې څخه په لاس راځي.

• **محيطي زاويه:** هغه زاویه ده، چې راس یې د دایرې پر محیط او ضلعې یې د دایرې وترونه وي.

- په یوه دایره کې د مساوي وترونو په مقابل کې مرکزي زاویې سره مساوي وي.
- د هرې محیطي زاویې پراخوالی د هغې د مقابل قوس له نیمایي سره مساوي دی.
- هره محیطي زاویه د مرکزي زاویې له نیمایي سره مساوي ده، چې دواړه زاویې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

• **مماسي زاويه:** هغه زاویه ده چې یوه ضلعه یې پر دایره مماس او بله ضلعه یې د دایرې وتر او راس یې د تماس په نقطه کې واقع وي.

- د هرې مماسي زاویې پراخوالی د هغې د مقابل قوس له نیمایي سره مساوي دی.
- د هغو مماسي او محیطي زاویو پراخوالی سره مساوي دي چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

• هره مماسي زاویه د مرکزي زاویې نیمایي ده چې دواړه د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

د دوو دایرو حالتونه یو له بل سره

— که د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ فاصله د دایرو د شعاعگانو د اوږدوالو له مجموعې څخه زیاته وي، داسې دایرو ته غیر متقاطع دایرې وایي.

— که د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ فاصله د دایرو د شعاعگانو د اوږدوالو له مجموعې سره مساوي وي، داسې دایرو ته خارجاً مماسي دایرې وایي.

— که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ فاصله د دایرو د شعاعگانو د اوږدوالو له مجموعې څخه کوچنی او د شعاعگانو د اوږدوالو د تفاضل له مطلقه قیمت څخه زیاته وي، داسې دایرو ته متقاطع دایرې وایي.

— که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ فاصله د شعاعگانو د اوږدوالو د تفاضل له مطلقه

د لومړي څپرکي پوښتنې

قیمت سره مساوي وي، داسې دایرو ته داځلا مماسي دایرې وایي.

_____ که د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ فاصله صفر وي، داسې دایرو ته متحدالمرکز دایرې وایي.

- په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ.

1- د یوې دایرې د قطر اوږدوالی مساوي دی په:

(a) $3r$ (b) π (c) 2π (d) $2r$

2- دایره په لاندې ډول ښودل کېږي:

(a) O (b) $(1, 2)$ (c) (b, a) (d) $C(O, r)$

3- هغه مستقیم خط چې له دایرې سره یوه مشترکه نقطه ولري:

(a) د وتر په نوم یادېږي. (b) د قوس په نوم یادېږي.

(c) د مماس په نوم یادېږي. (d) د محیط په نوم یادېږي.

4- که چیرې یو مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کړي دې خط ته:

(a) مستقیمه کرښه او دایره وایي. (b) مماس وایي.

(c) قاطع وایي. (d) موازي وایي.

5- په یوه مستوي کې یو مستقیم خط له دایرې سره څو حالتونه لري؟

(a) 3 (b) 7 (c) 4 (d) 1

6- هغه زاویه چې راس یې د دایرې پر محیط او ضلعي یې د دایرې وترونه وي:

(a) مرکزي زاویه ده. (b) مماسي زاویه ده.

(c) محیطي زاویه ده.

- تش ځایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

1- د دایرې هغه برخه چې د وتر په واسطه د دایرې له سطحې څخه بېله (جلا) شوې وي د دایرې د په نامه یادېږي.

2- د دایرې تر ټولو لوی وتر د دی.

3- د هغو نقطو سټ چې یې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی وي د دایرې ساحه بلل کېږي.

4- څه وخت چې یو مستقیم خط له دایرې سره هیڅ مشترکه نقطه ونلري هغه خط بلل کېږي.

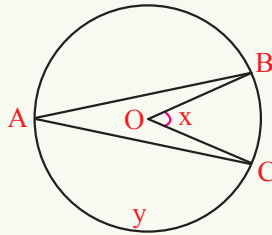
5- په هر قائم الزاویه مثلث کې د وتر د قایمو ضلعو د مربعاتو له مجموعې سره

6- په هره دایره کې هغه وتر چې مرکز ته نژدې وي تر ټولو وتر دی.

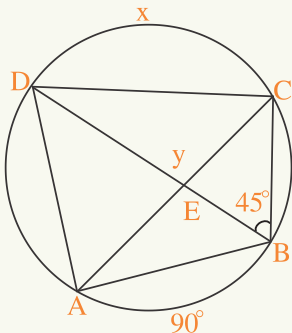
- په لاندې جملو کې سمې او نا سمې جملې د(س) او (ن) د تورو په مرسته په نښه کړئ.
- 1- () د مستوي د هغو ټولو نقطو سټ چې د مرکز (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د (r) مساوي فاصله ولري، دایره بلل کېږي.
- 2- () عموماً دایره د خپل محیط په نامه یادېږي.
- 3- () هغه قطعه خط چې د دایرې د محیط د یوې نقطې سره نښلوي، د دایرې د قطر په نامه یادېږي.
- 4- () په یوه دایره کې شعاع د قطر نیمایي ده.
- 5- () د $d = 2r$ په اړیکه کې d قطر او r د دایرې شعاع ده.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

- 1- د $C(O, r)$ په لاندې دایره کې که $\hat{y} = 155^\circ$ او $\hat{AB} = 155^\circ$ وي، د x زاویه پیدا کړئ.



- 2- په لاندې شکل کې د x او y اندازې پیدا کړئ.



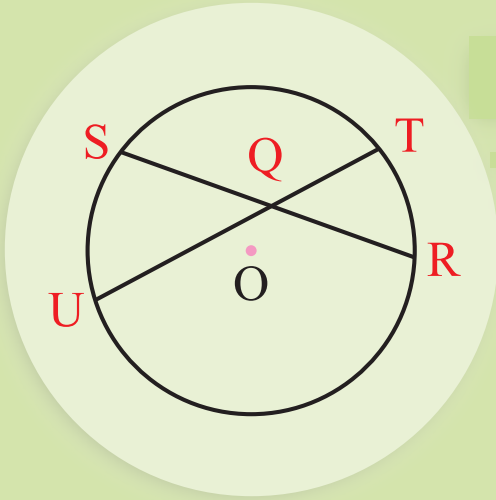


دویم څپرکی

د مستقیمو خطونو او
دایرو ترمنځ اړیکه



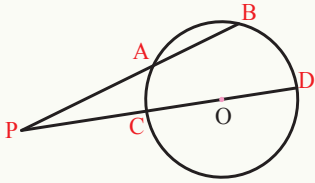
د یوې نقطې طاقت نظر یوې دایرې ته



مخامخ شکل ته پاملرنه وکړئ.
آیا ویلای شئ چې په دې شکل کې
لاندې مساوات صدق کوي؟

$$\overline{QR} \cdot \overline{QS} = \overline{QU} \cdot \overline{QT}$$

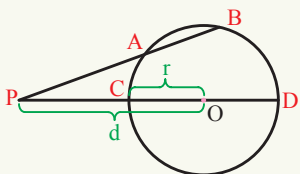
فعالیت



- د P له یوې نقطې څخه چې د $C(O, r)$ له دایرې څخه د باندې واقع ده پر دایره د \overline{PAB} قاطع خط رسم کړئ.
- د P له نقطې څخه د \overline{PCD} یو بل قاطع خط داسې رسم کړئ چې د $C(O, r)$ د دایرې له مرکز څخه تیر شي.
- د \overline{PAB} او \overline{PCD} د قطعاتو ترمنځ نسبت ولیکئ.
- په پورتنۍ اړیکه کې د \overline{PC} او \overline{PD} قطعه خطونو اوږدوالی د دایرې له مرکز څخه د فاصلې په حساب ولیکئ.
- که د P نقطې فاصله د دایرې له مرکز څخه d او د دایرې شعاع r وي، پورتنۍ اړیکه د d او r له جنسه ولیکئ.

له پورتنۍ فعالیت نتیجه په لاندې ډول وایو:

که د دایرې له خارجي نقطې څخه پر یوه دایره دوه قاطع خطونه داسې رسم شي، چې دویم قاطع د دایرې له مرکز څخه تیر شي، نو د لومړي قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل $d^2 - r^2$



له ثابت مقدار سره مساوي دی، چې د d د دایرې له مرکز څخه ددې نقطې فاصله او r د دایرې شعاع ده.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2$$

تعريف

شکل بنودل کېږي. ته $d^2 - r^2$ د P د نقطې طاقت نظر د $C(O, r)$ دایرې ته وایې او د $P_{(O)} = d^2 - r^2$ په

مثال: که د یوې دایرې قطر 10cm او د P د نقطه له دې دایرې 13cm فاصله ولري، د P د نقطې طاقت نظر د $C(O, r)$ دایرې ته پیدا کړئ.

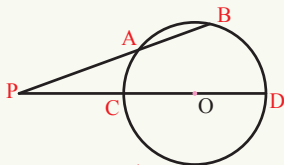
حل: څرنګه چې د دایرې قطر راکړل شوی دی، نو لومړی د دایرې شعاع او بیا د P د نقطې

$$r = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{cm} \quad \text{طاقت نظر دایرې ته پیدا کوو:}$$

$$P_{(O)} = d^2 - r^2$$

$$P_{(O)} = (13)^2 - (5)^2$$

$$P_{(O)} = 169 - 25 \Rightarrow P_{(O)} = 144$$



• که نظر یوې دایرې ته د یوې نقطې طاقت مثبت وي،

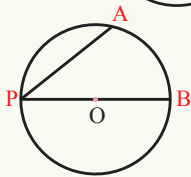
نو نقطه له دایرې څخه د باندې واقع ده، یعنې:

$$P_{(O)} = d^2 - r^2 > 0 \Rightarrow d^2 > r^2$$

• که نظر یوې دایرې ته د یوې نقطې طاقت صفر وي، نو

نقطه د دایرې پر محیط پرته ده، یعنې:

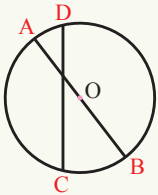
$$P_{(O)} = d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow d^2 = r^2$$



• که چیرې د یوې نقطې طاقت نظر یوې دایرې ته له صفر څخه

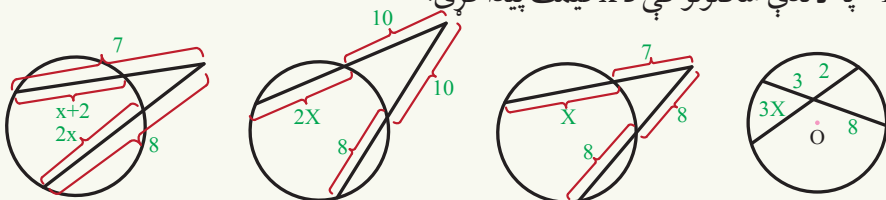
کوچنی یا منفي وي، نقطه د دایرې په داخل کې پرته ده، یعنې:

$$P_{(O)} = d^2 - r^2 < 0 \Rightarrow d^2 < r^2$$



پوښتنې

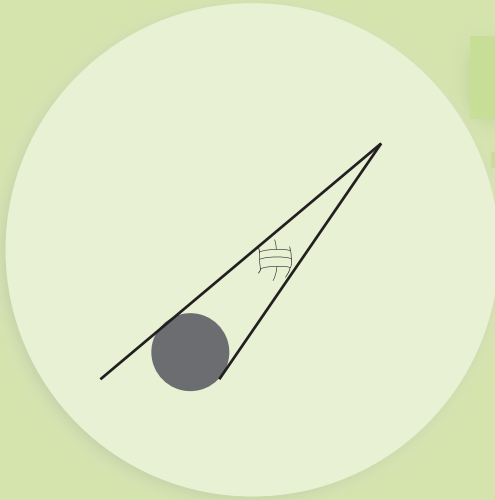
1- په لاندې شکلونو کې د X قیمت پیدا کړئ:



2- په لاندې حالتونو کې د یوې نقطې طاقت نظر یوې دایرې ته پیدا کړئ:

(الف) که $d=7$ او $r=4$ وي. (ب) که $d=3$ او $r=3$ وي. (ج) که $d=3$ او $r=5$ وي.

له دایرې سره مماس مستقیم خط



شکل ته پاملرنه وکړئ.

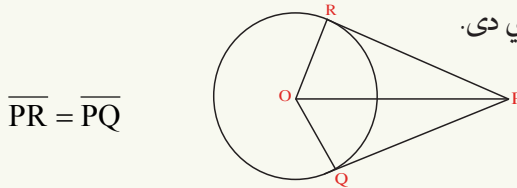
که چیرې د نور وړانگو د حرکت مسیر مستقیم خط ومنو، د نور وړانگې د توپ او د توپ له سیوری سره څه اړیکه لري؟

فعالیت

- د P له یوې نقطې څخه چې له دایرې څخه د باندې واقع ده، د $C(O, r)$ په دایره باندې د \overline{PQ} او \overline{PR} دوه مماسونه رسم کړئ.
- د Q او R نقطې پر دایره د مماس خط د تماس نقطې دي. ایا د P له نقطې څخه پر دایره بل مماس رسمېدلای شي؟
- د دایرې مرکز د (O) نقطه د R, Q او P له نقطوسره و نښلوئ.
- جوړ شوي مثلثونه یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- آیا د رسم شوو مماسونو اوږدوالی یو له بل سره مساوي دي؟

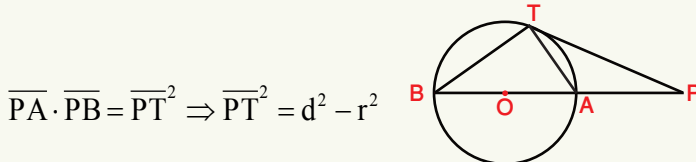
د پورتنی فعالیت نتیجه په لاندې ډول بیانوو:

– که چیرې د یوې دایرې له باندینې نقطې څخه پر دایره دوه مستقیم مماسونه خطونه رسم شي ددې مماسونو اوږدوالی سره مساوي دی.



$$\overline{PR} = \overline{PQ}$$

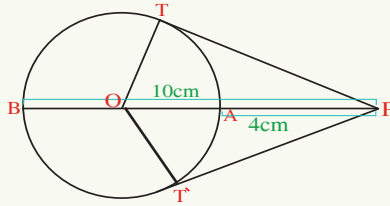
– که چیرې د یوې دایرې له باندینې نقطې څخه پر دایره یو مماس او یو قاطع خط رسم شي، ددې نقطې طاقت نظر دایرې ته د مماس د اوږدوالی له مربع سره مساوي دی.



$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \Rightarrow \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

مثال: په لاندې شکل کې د \overline{PT} او \overline{PT}' اوږدوالي په لاس راوړئ.
حل: پوهېږو چې د مماس او یو قاطع خط ترمنځ د $PA \cdot PB = PT^2$ اړیکه شته دی، نو لیکلای شو:

$$\begin{array}{l} PA = 4\text{cm} \\ PB = 10\text{cm} \\ PT = ? \end{array} \left| \begin{array}{l} PT^2 = PA \cdot PB \\ PT^2 = 4 \times 10 = 40 \\ PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \end{array} \right.$$



څرنګه چې پوهېږو که د دایرې له یوې باندینې نقطې څخه پر دایره دوه مماسونه رسم شي، ددې مماسونو اوږدوالی یو له بله سره مساوي دی.

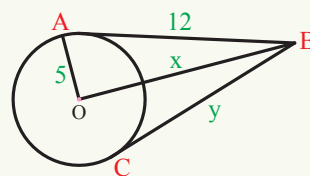
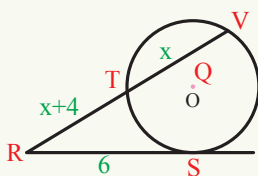
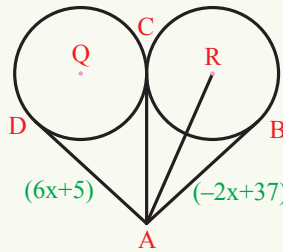
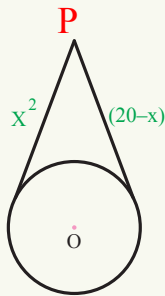
$$PT = PT' = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

— که د یوې دایرې له یوې باندینې نقطې څخه پر دایره دوه مماسونه رسم شي ددې مماسونو اوږدوالی سره مساوي دي.

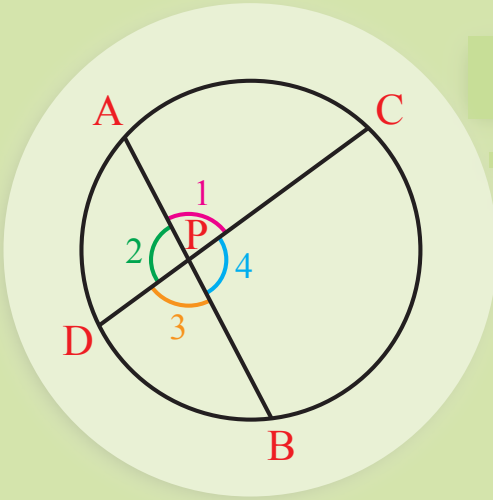
— که چیرې د یوې دایرې له یوې باندینې نقطې څخه پر دایره یو قاطع او یو مماس خط رسم شي، ددې نقطې طاقت نظر دایرې ته د مماس د اوږدوالي له مربع سره مساوي دی.

پوښتنې

په لاندې شکلونو کې د x قیمت لاسته راوړئ:



د دایرې داخلي زاویه



د یوې دایرې په داخل کې دوه داسې وټرونه رسم کړئ چې یو بل سره قطع کړي.

وویئ چې په شکل کې څو زاوې جوړې شوي او دا زاوې په څه نامه یادېږي؟

تعریف

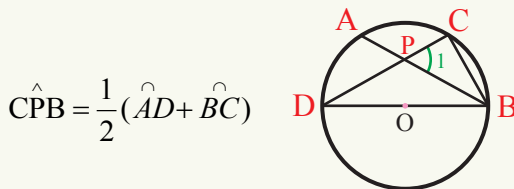
هغه زاوې چې د دایرې په داخل کې د دوو وټرونو له تقاطع څخه جوړېږي د دایرې داخلي زاوې بلل کېږي، لکه په پورتنی شکل کې د $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ زاوې.

فعالیت

- د $C(O, r)$ دایره رسم کړئ او په دې دایره کې د \overline{AB} او \overline{CD} دوه وټرونه داسې رسم کړئ چې د P په نقطه کې یو له بله سره قطع کړي، جوړې شوي زاوې څه نومېږي؟
- د C او D نقطې له B سره ونښلوئ د \hat{CPB} زاویه چې د \hat{PBD} د مثلث خارجي زاویه ده د مثلث له دوو غیر مجاورو زاویو سره څه اړیکه لري؟

د پورتنی فعالیت پایله په لاندې ډول ویلای شو:

د دایرې د هرې داخلي زاوې پراخوالی د هغو قوسونو د مجموعې له نیمایي سره مساوي دی چې د زاوې د ضلعو او د زاوې د ضلعو د امتداد له تقاطع څخه منځ ته راځي.

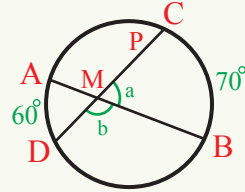


$$\hat{CPB} = \frac{1}{2}(\hat{AD} + \hat{BC})$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې د a او b زاویو پراخوالی پیدا کړئ.
حل: څرنګه چې د دایرې د هرې داخلي زاوې پراخوالی د هغه قوسونو د مجموعې له نیمایي سره مساوي دی چې د زاوې د ضلعو او د ضلعو د امتداد له تقاطع څخه منځ ته راځي.

$$\hat{CMB} = \hat{a} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{60^\circ + 70^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - \hat{a} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$



دویم مثال: په لاندې شکل کې د x او \widehat{NTM} زاوې پراخوالی پیدا کړئ.
حل: د یوې دایرې د داخلي زاویو د پراخوالی له مخې لیکلای شو چې:

$$\widehat{NM} = 9x + 17 \quad , \quad \widehat{PQ} = 10x - 10$$

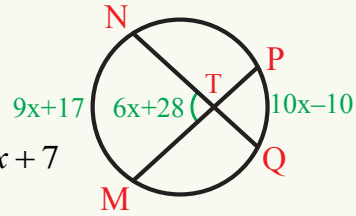
$$\widehat{NTM} = 6x + 28 \Rightarrow \widehat{NTM} = \frac{\widehat{NM} + \widehat{PQ}}{2}$$

$$6x + 28 = \frac{9x + 17 + 10x - 10}{2} \Rightarrow 12x + 56 = 19x + 7$$

$$12x - 19x = 7 - 56 \Rightarrow -7x = -49 \Rightarrow x = 7$$

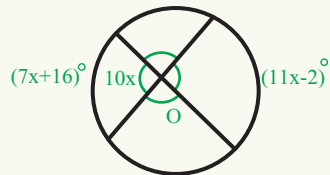
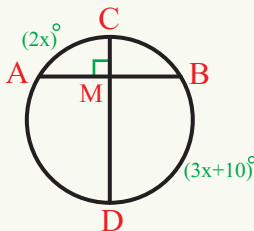
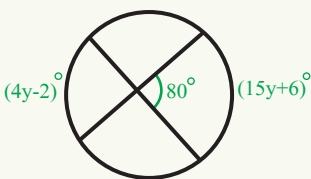
$$\widehat{NTM} = 6x + 28 = 6 \cdot 7 + 28 = 42 + 28 = 70$$

$$\widehat{NTM} = 70^\circ$$

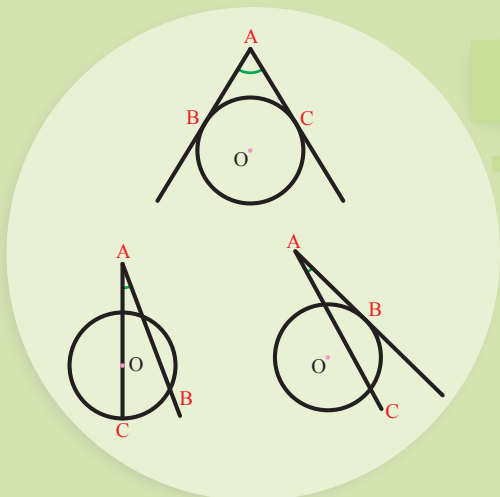


پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د x او y قیمتونه پیدا کړئ:



د دایرې خارجي زاویه



په مخامخ شکلونو کې دا زاویې او قطعہ
خطونہ څه نومېږي؟

تعريف

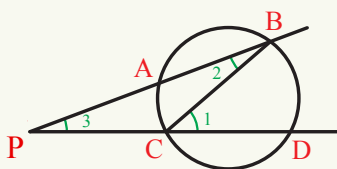
هغه زاویه چې د دوو قاطع خطونو، د دوو مماسونو او یا د یوه قاطع او یو مماس خط له تقاطع څخه د دایرې په خارج کې جوړه شوې وي، د دایرې خارجي زاویه بلل کېږي.

فعالیت

- د $C(O, r)$ په دایره کې د \overline{AB} او \overline{CD} دوو غیر موازي و ترونو ته امتدا ورکړو، تر څو د \widehat{BPD} خارجي زاویه جوړه شي او د C نقطه د B له نقطې سره ونښلوی.
- په شکل کې ($\hat{1}$) چې \widehat{BPC} د مثلث خارجي زاویه ده، له دوو غیرمجاورو زاویو سره څه اړیکه لري.

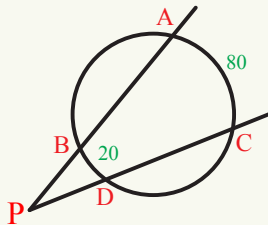
د پورتنی فعالیت نتیجه په لاندې ډول ده:

د یوې دایرې د هغه خارجي زاویې پراخوالی د هغو قوسونو د تفاضل له نیمايي سره مساوي دی، چې د وترونو په واسطه قطع کېږي.



$$\widehat{BPD} = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC})$$

مثال: په لاندې شکل کې د \widehat{APC} د زاويې پراخوالی په داسې حالت کې پیدا کړئ چې $\widehat{BD} = 20^\circ$ او $\widehat{AC} = 80^\circ$ وي:



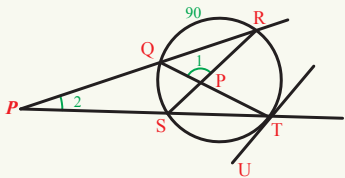
حل: د دايرې د خارجي زاويې د پراخوالي له مخې ليکلای شو چې:

$$\begin{aligned}\widehat{APC} &= \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD}) \\ &= \frac{1}{2}(80 - 20)^\circ = \frac{1}{2}60^\circ\end{aligned}$$

$$\widehat{APC} = 30^\circ$$

پوښتنې

په لاندې شکلونو کې د نامعلومو زاويو پراخوالی پیدا کړئ.

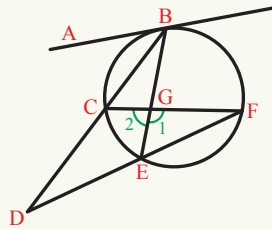


$$\widehat{QR} = 120^\circ$$

$$\widehat{RT} = 90^\circ$$

$$\widehat{QS} = 50^\circ$$

$$\widehat{STU} = ? , \hat{1} = ? , \hat{2} = ?$$



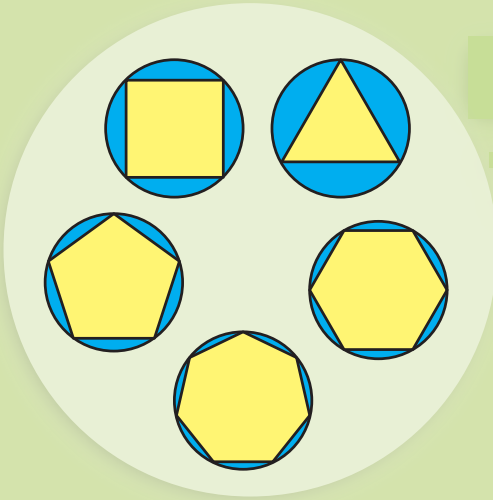
$$\widehat{BC} = 90^\circ$$

$$\widehat{BF} = 110^\circ$$

$$\widehat{EF} = 110^\circ$$

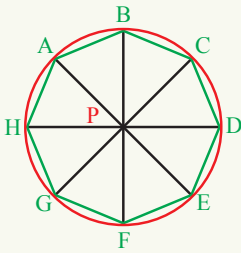
$$\widehat{ABC} = ? , \hat{1} = ? , \hat{2} = ? , \widehat{D} = ?$$

محيطي دائره



په مخامخ شکل کې کوم هندسي شکلوته لیدل کېږي؟ نومونه یې ووايئ.

تعريف



هغه دایره چې د یوې مضلعې له راسونو څخه تېره شي، د مضلعې محیطي دایره نومېږي او مضلعې ته په دایره کې مرسوم مضلع وایي، لکه د مخامخ شکل په شان:

د مثلث محیطي دایره: هغه دایره چې د مثلث له درې واړو راسونو څخه تېره شي، یا په بل عبارت د مثلث په راسونو خارجاً مماس وي، د مثلث د محیطي دایرې په نامه یادېږي.

فعالیت

- د $\triangle ABC$ مثلث رسم کړئ.
- د \overline{AB} ، \overline{AC} او \overline{BC} د ضلعو عمودي ناصفونه رسم کړئ.
- پورتنی عمودي ناصفونه په څو نقطو کې یو بل سره قطع کوي؟ د عمودي ناصفونو د تقاطع نقطې ته O ووايئ.
- د \overline{OA} ، \overline{OB} او \overline{OC} اوږدوالي سره پرتله کړئ.
- د O په مرکز او د \overline{OA} په شعاع یوه دایره رسم کړئ، آیا دا دایره د B او C له نقطو څخه هم تیرېږي؟ ولې؟
- رسم شوي دایره نظر مثلث ته په کوم نوم یادېږي؟

د پورتنې فعالیت نتیجه په لاندې ډول ویلای شو:

د یوه مثلث د عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ددې مثلث د محیطي دایرې مرکز دی.

مثال: د $\triangle ABC$ یو داسې قائم الزاویه مثلث رسم کړئ چې د قائمو ضلعو اوږدوالی یې په ترتیب سره 8 او 6 واحد وي، د دې مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د هر قائم الزاویه مثلث د محیطي دایرې مرکز د مثلث پر قطر باندې پروت وي، نو لومړی د قائم الزاویه مثلث د وتر اوږدوالی پیدا کوو چې د قطر د تنصیف نقطه ددې مثلث د محیطي دایرې مرکز دی.

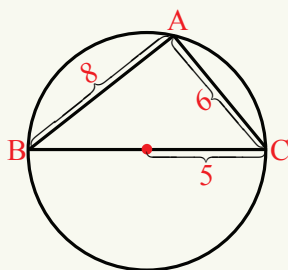
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\overline{BC} = \sqrt{100}$$

$$\overline{BC} = 10 \text{ unit}$$

$$r = \frac{BC}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5 \text{ unit}$$

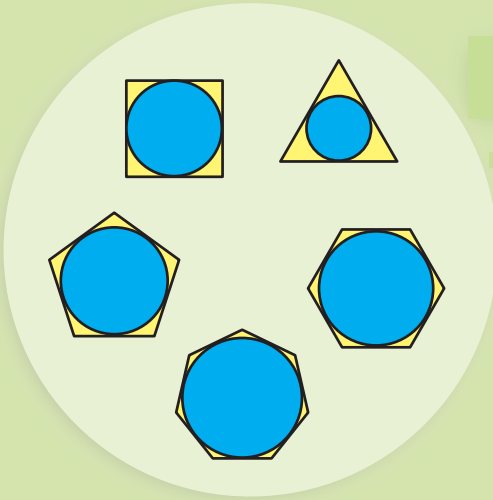


- هغه دایره چې د مضعې له راسونو سره مماس وي، د مضعې د محیطي دایرې په نامه یادېږي او مضعې ته په دایره مرسوم مضع وایي.
- د یوه مثلث د ضلعو د عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ددې مثلث د محیطي دایرې مرکز دی.

پوښتنې

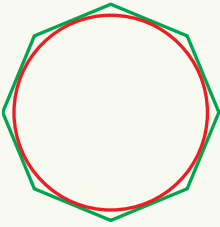
1- د هغه مثلث د محیطي دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په ترتیب سره 3cm , 4cm او 5cm وي.

2- د قائم الزاویه، متساوي الاضلاع او متساوي الساقین مثلثونو د محیطي دایرو مرکزونه چیرې واقع دي؟ په شکل کې یې وښیئ.



- کوم هندسي شکلونه چې په مخامخ شکل کې وینئ، نومونه یې ووايئ؟
- د شکلونو تر منځ څه اړیکې وینئ؟

تعريف



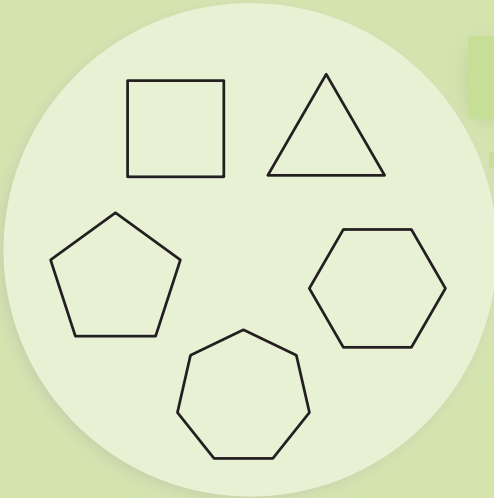
هغه دایره چې محیط یې د مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلعي د محاطي دایرې په نامه یادېږي، لکه په مخامخ شکل کې چې دایره د مضلعي په واسطه احاطه شوې ده.

د مثلث محاطي دایره: هغه دایره چې محیط یې د یو مثلث په درې واړو ضلعو مماس وي، د مثلث محاطي دایره بلل کېږي.

فعالیت

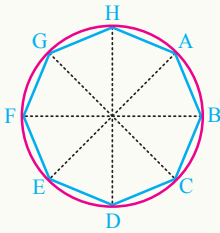
- د $\triangle ABC$ یو اختیاري (کيفي) مثلث رسم کړئ.
- د A, B, C او د زاویو ناصفونه رسم او د تقاطع نقطه یې په (O) سره وښیئ.
- د O له نقطې څخه د $\triangle ABC$ د مثلث پر ضلعو باندې د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او \overline{OP} عمود خطونه رسم کړئ.
- د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او \overline{OP} عمود خطونو اوږدوالي سره پرتله کړئ.
- آیا هغه دایره چې د (O) په مرکز او د \overline{ON} په شعاع رسم شي، د M او P له نقطو څخه تیرېږي؟ ولې؟

د منظمې مضلعي رسمول



- پاملرنه وکړئ.
- په شکل کې څو ډوله مضلعي وینئ؟
- څه فکر کوئ دا مضلعي څرنگه رسم شوي دي؟

فعالیت



- د $C(O, r)$ دایره رسم کړئ او په دایره کې (۸) مساوي مرکزي زاويې رسم کړئ.
 - که n د یوې مضلع د ضلعو شمېر او θ د مضلع د ضلعو مقابله مرکزي زاویه وي، آیا د $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ اړیکه سمه ده؟
 - د دایرې له محیط سره د زاویو د ضلعو د تقاطع نقطې یو له بله سره ونښلوئ.
 - آیا د جوړې شوې مضلع ضلعي سره مساوي دي؟ ولې؟
 - جوړه شوې مضلع څه ډول مضلع ده؟ د مضلعي د هرې ضلعي د مقابلې مرکزي زاويې پراخوالی څو درجې دی؟
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

د یوې منظمې n ضلعي مضلعي د هرې مقابلې مرکزي زاويې پراخوالی مساوي په $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ دی.

فعالیت

- د $C(O, r)$ په دایره کې یوه منظمه شپږ ضلعي محاط شوې ده.
- د دایرې مرکز د شپږ ضلعي له راسونو سره ونښلوئ. څو مثلثونه جوړېږي؟
- د دې شپږ ضلعي د ضلعو مخامخ هره مرکزي زاویه څو درجې ده؟
- جوړ شوي مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟

له پورتنی فعالیت نتیجه په لاندې ډول ویلای شو:

د یوې منظمې شپږ ضلعي د هرې ضلعي اوږدوالی ددې شپږ ضلعي د محیطي دایرې له شعاع سره مساوي دي.

مثال: هغه دایره چې شعاع یې 2cm ده، څرنگه کولی شو چې دا دایره د یوې منظمې شپږ ضلعي په واسطه محاط کړو؟

حل: څرنگه چې پوهېږو چې د منظمې شپږ ضلعي د هرې ضلعي اوږدوالی ددې شپږ ضلعي د محیطي دایرې له شعاع سره مساوي دی، نو د پرکار خوله د 2cm په اندازه خلاصوو او په پرله پسې توګه د دایرې له محیط څخه مساوي قوسونه جلاکوو، د ټاکل شوو نقطو له نښلولو څخه منظمه شپږ ضلعي په لاس راځي.

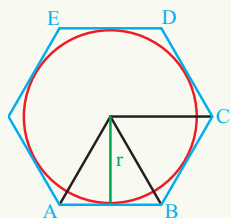
د منظمې مضلعي مساحت پیدا کول د مضلعي د محاطي دایرې د محیط او د شعاع د اوږدوالی له جنسه:

که چیرې د یوې منظمې n ضلعي مضلعي مساحت په A ، محیط یې په P او د محاطي دایرې

$$A = \frac{1}{2} P \cdot r$$

شعاع یې په r سره وښیو، نو د مضلعي مساحت مساوي دی په:

چې په لاندې ډول ثبوتېږي:



$$A = \frac{1}{2} AB \cdot r \cdot n$$

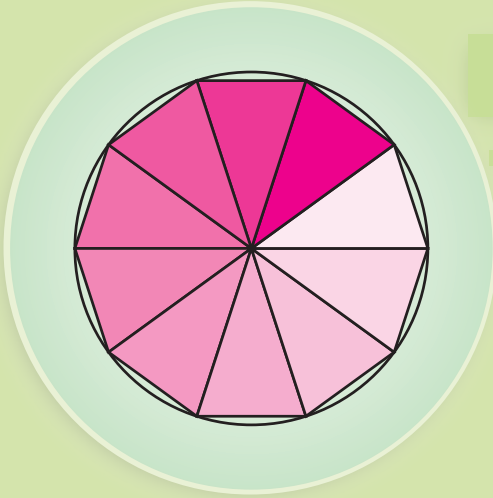
$$P = AB \cdot n \text{ محیط } \Rightarrow A = \frac{1}{2} P \cdot r$$

پوښتنې

1- په یوه دایره کې چې شعاع یې 3cm وي، یو متساوي الاضلاع مثلث داسې رسم کړئ،

چې محاط په دایرې وي؟

د دایرې محیط او مساحت



په راکړل شوي شکل کې د مثلثونو مجموعې مساحت د دایرې له مساحت سره او د مثلثونو د ضلعو د اوږدوالي مجموعه د دایرې له محیط سره پرتله کړئ.

د $C(O, r)$ په دایره کې که قطر د (d) او محیط یې د (C) په توري سره ونښودل شي، د دایرې د دې دواړو عناصرو تر منځ لاندې اړیکه شتون لري؟

$$\frac{\text{د دایرې محیط}}{\text{د دایرې قطر}} = \frac{C}{d} = \pi = \text{Constant}$$

$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow c = 2\pi r \dots (I) \quad [\pi \approx 3.14159 \dots]$$

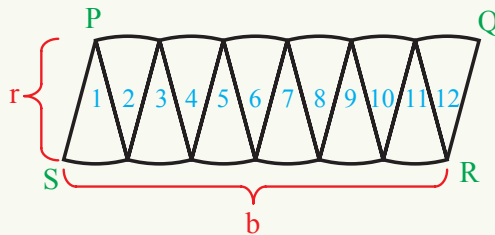
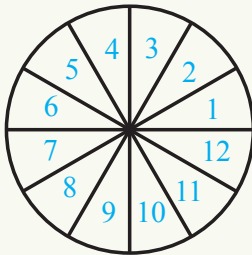
پوهېږو چې $r = \frac{d}{2}$ یا $d = 2r$ دی، که چیرې په (I) رابطه کې د (d) پر ځای $(2r)$ وضع کړو، د دایرې محیط له لاندې اړیکې څخه لاسته راځي:

$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi r$$

د دایرې د مساحت د ثبوت او محاسبې لپاره عالي ریاضي ته اړیو، دلته د دایرې د مساحت د محاسبې لپاره د مشاهدهې له طریقې څخه گټه اخلو.

ددې کار لپاره دایره د قطرونو په واسطه په (12) مساوي برخو وېشو، له 1 څخه تر 12 شمېرې پورې پرې لیکو او قطع کوو یې او د لاندې شکل په شان یې څنگ په څنگ ږدو، په ښکاره ډول لیدل کېږي، چې د متوازي الاضلاع په شان شکل جوړېږي.



پوهېږو چې قاعده (b) د دایرې د محیط نیمایي ده. ولې؟ یعنې: $\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r = b$

او په دې هم پوهېږو چې د متوازي الاضلاع مساحت له لاندې اړیکې څخه لاسته راځي:

ارتفاع \times قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

$$b \cdot r = \frac{1}{2} C \cdot r$$

څرنگه چې د دایرې محیط $C = 2\pi r$ دی، نو لرو چې:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

له بلې خوا پوهېږو چې د متوازي الاضلاع او د دایرې مساحت تقریباً مساوي دي، نو لیکلای شو $A = \pi r^2$ دی.

په نتیجه کې ویلای شو چې د دایرې مساحت د $A = \pi r^2$ او د دایرې محیط د $C = 2\pi r$ له اړیکې څخه په لاس راځي.

لومړی مثال: د یوې دایرې شعاع 14cm ده، د دې دایرې مساحت پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې د دایرې مساحت $A = \pi r^2$ دی، نو لرو چې:

$$A = \pi r^2$$

$$A = (3.14159) \cdot (14\text{cm})^2$$

$$A = (3.14159) \cdot 196\text{cm}^2 \Rightarrow A = 615.75\text{cm}^2$$

دویم مثال: د یوې دایرې قطر 70cm دی، د دې دایرې شعاع او مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې د دایرې قطر راکړل شوی دی، نو لومړی یې شعاع او بیا یې مساحت پیدا کوو:

$$r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4\text{cm}^2$$

دریم مثال: که د یوې دایرې محیط $14\pi\text{cm}$ وي، د دې دایرې شعاع او مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې د دایرې محیط راکړل شوی دی، نو لومړی شعاع او بیا د دایرې مساحت پیدا کوو:

$$C = 14\pi\text{cm}$$

$$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159) \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow A = 153.93\text{cm}^2$$

د r په شعاع د یوې دایرې مساحت د $A = \pi r^2$ له اړیکې او محیط یې د $C = 2\pi r$ له اړیکې څخه لاس ته راوړو.

پوښتنې

- 1- که د یوې دایرې محیط 41cm وي د دې دایرې شعاع پیدا کړئ.
- 2- د هغه دایرې محیط پیدا کړئ چې شعاع یې د اوږدوالی واحد وي.
- 3- د هغه دایرې مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې د اوږدوالی واحد وي.

د دویم څپرکی لنډیز

• که چیرې د دایرې له یوې خارجي نقطې څخه پر دایره دوه مماسونه رسم شي، ددې مماسونو اوږدوالی یو له بل سره مساوي دي.

• که چیرې $d^2 - r^2 > 0$ وي، نقطه له دایرې د باندې ده او که $d^2 - r^2 = 0$ وي، نقطه د دایرې پر محیط پرته ده.

• که چیرې $d^2 - r^2 < 0$ وي، نقطه د دایرې په داخل کې پرته ده.

• د دایرې داخلي زاویې:

هغه زاویه چې د دایرې په داخل کې د دوو وترونو له تقاطع څخه جوړه شوې وي، د دایرې د داخلي زاویې په نامه یادېږي؟

• د دایرې د هرې داخلي زاوې پراخوالی د زاوې او د زاوې د ضلعو د امتداد د مقابلو قوسونو د مجموعې له نیمایي سره مساوي دی، که α د دایرې یوه داخلي زاویه وي،

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2} \text{ نو}$$

• د دایرې باندني (خارجي) زاویه:

هغه زاویه چې د دایرې په خارج کې د دوو مماسونو یا د دوو قاطع خطونو او یا یو مماس او یو قاطع خط له تقاطع څخه جوړېږي، د دایرې د خارجي زاوې په نامه یادېږي.

• د دایرې د هرې خارجي زاوې پراخوالی د زاوې د مقابلو قوسونو د تفاضل له نیمایي سره مساوي دی.

که α د دایرې یوه خارجي زاویه وي او \hat{a} او \hat{b} د α د زاوې مقابل قوسونه وي، نو:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{a} - \hat{b}}{2}$$

مضلع: هغه شکل چې د څو قطعه خطونو په واسطه څوکه په څوکه داسې سره قطع کړي، چې هېڅ دوه قطعه خطونه د یو مستقیم خط په امتداد نه وي او د مضلع راس یوازې او یوازې د دوو قطعه خطونو د تقاطع نقطه وي، د مضلعي په نامه یادېږي.

د مضلع محيطي دایره: هغه دایره چې د مضلعي له راسونو سره مماس وي، د مضلعي محيطي دایره ده. (مضلع د دایرې په داخل کې ده).

د مضلع محاطي دایره: هغه دایره چې د مضلعي له ضلعو سره مماس وي، د مضلعي محاطي دایره بلل کېږي.

د مثلث خارجي محاطي دایره: هغه دایره چې د مثلث پر یوه ضلعه او د مثلث د دوو نورو ضلعو په امتداد مماس وي، د مثلث خارجي محاطي دایره نومېږي.

● د هغه څلور ضلعي د مقابلو زاویو مجموعه چې پر دایره رسم شوي وي، 180° ده.

● د دایرې محیط د $C = 2\pi r$ له اړیکې څخه لاسته راځي.

● د دایرې مساحت د $A = \pi r^2$ له اړیکې څخه لاسته راځي.

د دویم څپرکي پوښتنې

● په لاندې پوښتنو کې هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړۍ تاو کړئ.

1- که چیرې د P یوه نقطه د دایرې پر محیط پرته وي، نو ددې نقطې طاقت نظر دایرې ته عبارت دی له:

(a) 1

(b) 2

(c) 0

(d) درې واړه ځوابونه سم دي.

2- که P د نقطه له دایرې څخه د باندې واقع وي، r د دایرې شعاع او د P د نقطې فاصله د دایرې له مرکز څخه d وي، نو د P د نقطې طاقت نظر دایرې ته مساوي دی په:

(a) $d - r > 0$

(b) $d^2 - r^2 > 0$

(c) $d - r < 0$

(d) $r^2 - d^2 > 0$

3- که د یوې نقطې فاصله د $C(O, r)$ له دایرې څخه 13cm او د دایرې قطر 10cm وي که له دې نقطې څخه پر دایره قاطع خط رسم شي، د قاطع د باندیني برخې اوږدوالی له دې نقطې څخه مساوي دی په:

(a) 13 cm

(b) 10 cm

(c) 12 cm

(d) 8 cm

4- که د P له نقطې څخه د $C(O, r)$ پر دایره د رسم شوي مماس اوږدوالی 12cm وي، د P د نقطې او د دایرې د مرکز تر منځ فاصله په داسې حال کې چې د دایرې قطر 10cm وي، مساوي ده په:

(a) 13 cm

(b) 12 cm

(c) 10 cm

(d) 5 cm

5- که چیرې د $C(O, r)$ په دایره کې د \overline{AB} وتر ته د P د نقطې پورې امتداد ورکړو، په دې ډول چې: $\overline{AP} = 8\text{cm}$ او $\overline{BP} = 2\text{cm}$ وي، د \overline{PT} د مماس اوږدوالی عبارت دی له:

(a) 4 cm

(b) 8 cm

(c) 2 cm

(d) درې واړه ځوابونه نا سم دي.

● تش ځايونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

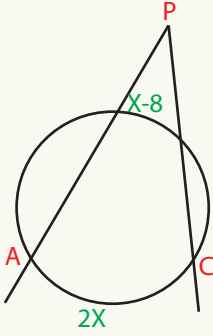
- 1- $d^2 - r^2$ د يوې نقطې نظر يوې دایرې ته دی.
- 2- که چیرې \overline{PT} مستقیم خط د $C(O, r)$ پر دایره مماس وي، د P د نقطې طاقت نظر د $C(O, r)$ دایرې ته عبارت دی له $\overline{PT}^2 =$ دی.
- 3- که د P نقطه د دایرې پر محیط پرته وي، نو د P د نقطې طاقت نظر دې دایرې ته دی.
- 4- که نقطه د دایرې په داخل کې وي، نو د دې نقطې طاقت نظر دایرې ته دی.
- 5- که نقطه له دایرې څخه د باندې وي، نو د دې نقطې طاقت نظر دایرې ته دی.
- 6- که $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ وي، د A, B, C او D نقطې د پر محیط پرتې دي او د P نقطه د په داخل او یا د باندې پرته ده.
- 7- که د A, B او T نقطې د دایرې پر محیط پرتې وي او د A, B او P نقطې د یو مستقیم خط پر امتداد وي، په حالت کې $\overline{PT}^2 =$ ده، په هغه صورت کې چې د P نقطه له دایرې د باندې واقع وي.

● د سمو جملو په مخ کې د(س) او د ناسمو جملو په مخ کې د(ن) توری ولیکئ.

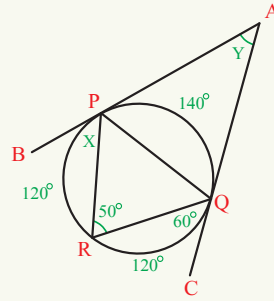
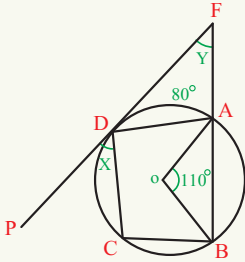
- 1- () د يوې نقطې طاقت نظر يوې دایرې ته د دایرې له مرکز څخه د نقطې د فاصلې له مربع سره مساوي دی.
- 2- () که یوه نقطه د دایرې پر محیط پرته وي، د دې نقطې طاقت نظر دایرې ته له صفر سره مساوي دی.
- 3- () که یوه نقطه د دایرې په داخل کې واقع وي، د دې نقطې طاقت نظر يوې دایرې ته منفي دی.
- 4- () که یوه نقطه د دایرې د باندې واقع وي، د دې نقطې طاقت نظر دایرې ته مثبت دی.
- 5- () د يوې نقطې طاقت نظر هرې دایرې ته مثبت دی.
- 6- () د يوې نقطې طاقت نظر دایرې ته $d^2 - r^2$ دی، که d د نقطې فاصله د دایرې له مرکز څخه او r د دایرې شعاع وي.

● لاندې پوښتنې حل کړئ.

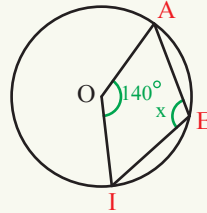
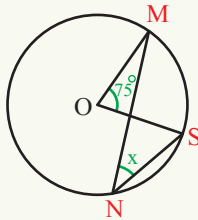
1- په لاندې شکل کې که $\hat{P} = 43^\circ$ او د \hat{P} د زاوېې مقابل قوسونه په ترتیب سره $(2x)^\circ$ او $(x-8)^\circ$ وي، د \hat{APC} د زاوېې پراخوالی پیدا کړئ.



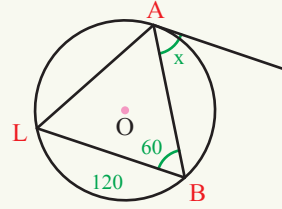
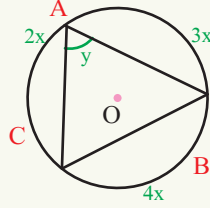
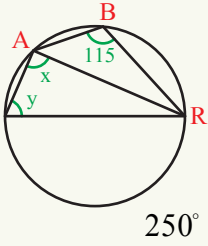
2- په لاندې شکلونو کې د \hat{x} او \hat{y} د زاوېو پراخوالی پیدا کړئ.



3- په لاندې شکلونو کې د \hat{x} د زاوېې پراخوالی پیدا کړئ.

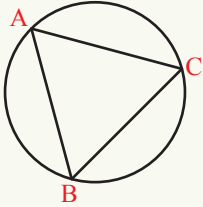


4- د \hat{x} او \hat{y} زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې پیدا کړئ.



5- د محاطي دایرې د تعریف له مخې وښیئ چې د هر مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180°

ده.





دریم چی رکی
تحلیلی هندسه

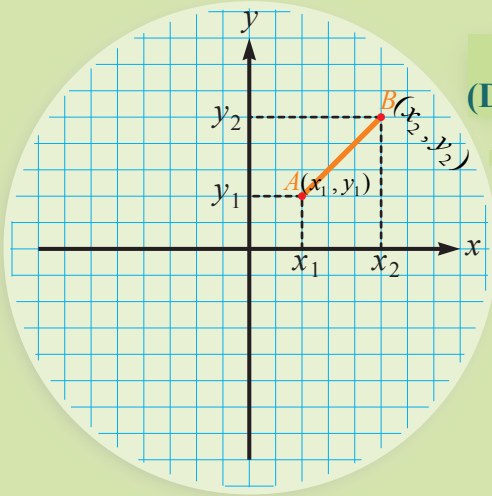
تحليلي هندسه

(Analytic Geometry)

د الجبر او هندسې تر منځ اړیکې، له تحليلي هندسې څخه عبارت دی، چې د الجبري معادلو او هندسې شکلونو په مرسته تر بحث لاندې نیول کېږي، فرانسوي ریاضي پوه دیکارت، د لومړي ځل لپاره، د ټاکلو هندسي اشکالو او الجبري معادلو تر منځ، اړیکه و څېړله، ویې ویل: چې ځینې الجبري معادلې، یو ټاکلی هندسي شکل لري. څرنگه چې، د هندسې د علم بنسټ ټکی او د الجبري معادلو بنسټ عدد جوړوې، نو لدې کبله، لومړی د ټکي او عدد تر منځ اړیکې تر څېړنې لاندې نیسو، دیکارت د عدد او ټکي تر منځ د اړیکو د څېړنې لپاره، د قائم مختصاتو د محورونو داسې یو سیستم راوپیژاند چې تراوسه د دیکارت په نامه یادېږي.



د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two Points)



د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوې نقطې د قایمو مختصاتو په مستوي کې د AB یو قطعه خط ټاکي. تاسو څه فکر کوئ چې د A او B نقطو ترمنځ فاصله څرنگه پیدا کولای شو؟

فعالیت

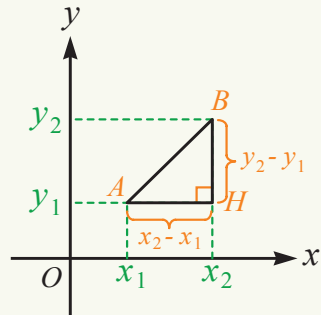
- د $A(3, 5)$ او $B(5, 4)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښیئ؟
- د AB قطعه خط رسم کړئ.
- د A او B د نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه کولای شو چې په عمومي ډول د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطو ترمنځ فاصله په لاندې ډول په لاس راوړو:
په لاندې شکل کې AHB یو قایم الزاویه مثلث دی نو د فیثاغورث د قضیې په استفادې سره لیکو:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \dots\dots\dots \text{د فیثاغورث د قضیې}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AH} = x_2 - x_1 \\ \overline{BH} = y_2 - y_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



لومړی مثال: د $A(1,7)$ او $B(5,4)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: د دوو نقطو ترمنځ د فاصلې د فورمول په مرسته لرو چې:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ unit}$$

دویم مثال: د $A(3,4)$ نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې د مبدا د نقطې وضعیه کمیات $O(0,0)$ دي، نو د دوو نقطو ترمنځ د فاصلې فورمول لاندې شکل غوره کوي.

$$x_1 = 0 \quad \text{او} \quad y_2 = 0$$

$$OA = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله عبارت ده له:

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

د $P(x, y)$ د هرې اختیاري نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه عبارت ده له:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

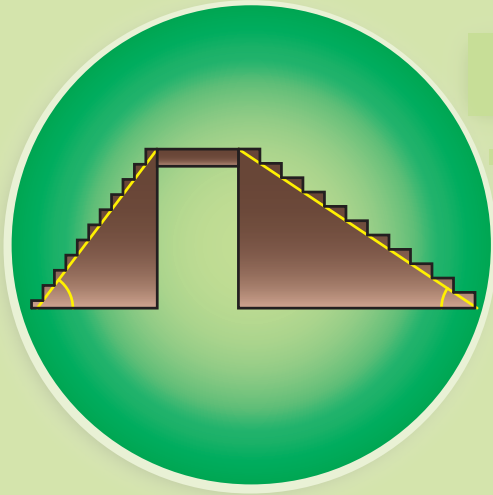
پوښتنې

1- د $A(0,3)$ او $B(2,0)$ د نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

2- د $P(1,3)$ او $Q(3,7)$ د نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

3- که چېرې $A(-1,4)$ ، $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یو مثلث د راسونو د نقطو وضعیه کمیات وي، د دې مثلث محیط پیدا کړئ.

4- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ، چې راسونه یې $A(2,0)$ ، $B(6,2)$ او $C(1,2)$ وي.

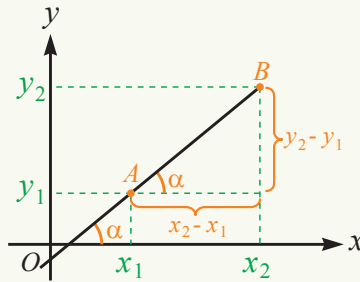


شکل ته وگورئ په کومه زینه په آسانی سره ختلاى شی؟ دلیل یی وویئ.

که $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ د \overline{AB} د مستقیم خط دوې اختیاري نقطې وي، د $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

نسبت ته د \overline{AB} مستقیم خط میل وایی او په لاندې ډول یې لیکي:

$$m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



لومړی مثال: د هغه مستقیم میل پیدا کړئ چې د $A(3,5)$ او $B(4,6)$ له نقطو څخه

تیرېږي.

حل: پوهېږو چې د مستقیم خط میل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ له رابطې څخه په لاس راځي، نو لرو چې:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 5}{4 - 3} = 1$$

دویم مثال: د \overline{AB} مستقیم خط د $A(2,5)$ او $B(4,k)$ له نقطو څخه تیرېږي، د k

قیمت په داسې حالت کې پیدا کړئ چې د \overline{AB} د مستقیم خط میل (۳) وي.

حل: د k د قیمت د پیدا کولو لپاره د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ له رابطې څخه په لاندې ډول کار اخلو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$3 = \frac{k - 5}{4 - 2}$$

$$k - 5 = 6 \Rightarrow k = 11$$

دریم مثال: د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $P(2, 3)$ نقطې او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېر شي.

حل: څرنګه چې مستقیم خط له مبدا څخه تېرېږي او د مبدا مختصات $O(0, 0)$ دي، نو میل یې په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 3}{0 - 2} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5 \quad \text{یا:}$$

پوښتنې

۱- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $A(1, 1)$ او $B(-1, -1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

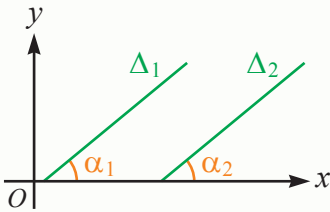
۲- د AB مستقیم خط د $A(-2, 2\sqrt{3})$ او $B(1, a)$ له نقطو څخه تېرېږي، که د AB مستقیم خط میل $\sqrt{3}$ وي، د a قیمت پیدا کړئ.

د موازي مستقيمو خطونو ميل



په راکرل شوې شکل کې ووايئ چې د زینې بازوگان یو له بله سره څه ډول اړیکه لري؟

فعالیت



• د وضعیه کمیاتو په قایمو مختصاتو کې د Δ_1 او Δ_2 دوه مستقیم موازي خطونه داسې رسم کړئ چې د x محور له مثبت جهت سره حادې زاوې جوړې کړي.

• د Δ_1 او Δ_2 د مستقیمو خطونو میلونه پیدا او پرتله کړئ، یو له بل سره څه ډول اړیکې لري؟

• که چیرې د Δ_1 مستقیم خط د x د محور له مثبت جهت سره د α_1 او د Δ_2 مستقیم خط، د x د محور له مثبت جهت سره د α_2 زاویه جوړه کړي، نو α_1 او α_2 زاوې سره څه اړیکه لري؟

په عمومي ډول د پورتنی فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

د موازي مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.

که چیرې د دوو مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي وي، نو هغه زاوې چې دا مستقیم خطونه یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، هم سره مساوي دي.

مثال: که چیرې د Δ_1 مستقیم خط د $A(2,5)$ او $B(-6,-11)$ له نقطو او د Δ_2 مستقیم خط د $C(-4,-6)$ او $D(3,8)$ له نقطو څخه تېر شي، د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه په خپل منځ کې څه اړیکې لري؟

حل:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\overline{AB}} = m_{\Delta_1} &= \frac{-11 - 5}{-6 - 2} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\overline{CD}} = m_{\Delta_2} &= \frac{8 - (-6)}{3 - (-4)} = \frac{8 + 6}{3 + 4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

څرنگه چې د Δ_1 او Δ_2 مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي، نو دا مستقیم خطونه سره موازي دي.

پوښتنې

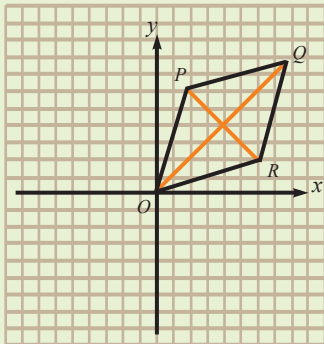
1- که د $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ او $D(0,-5)$ نقطې د یوې څلور ضلعي راسونه

وي، نو

الف: د څلور ضلعي مقابلې ضلعي یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

ب: د څلور ضلعي د قطرونو میلونه پیدا کړئ.

د عمود مستقیمو خطونو میل

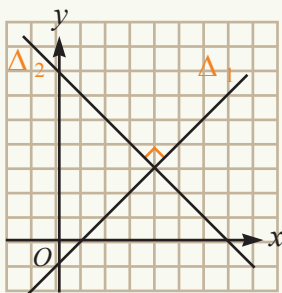


د $OPQR$ څلور ضلعي یو معین (لوزي) دی.
کولای شئ د معین خاصیتونه د راسونو د وضعیه کمیاتو په مرسته وویایئ.

فعالیت

- د $O(0,0)$, $B(1,3)$, $C(4,4)$, او $D(3,1)$ نقطې د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
 - د O , B , C , او D نقطې سره ونښلوئ او د $OBCD$ شکل لاسته راوړئ.
 - د \overline{OB} , \overline{BC} , \overline{CD} , او \overline{DO} د ضلعو اوږدوالي پیدا کړئ.
 - وښیئ چې د \overline{OC} او \overline{BD} قطرونه یو پر بل عمود دي.
- د پورتنی فعالیت له پایلې څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف



که د Δ_1 او Δ_2 دوو مستقیمو خطونو میلونه په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو د Δ_1 او Δ_2 مستقیم خطونه هغه وخت یو پر بل عمود دي چې د دوی د میلونو تر منځ لاندې اړیکې موجودې وي:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

مثال: هغه مستقیم خط چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ له نقطو څخه تېرېږي، له هغه مستقیم خط سره چې د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ له نقطو څخه تېرېږي، څه ډول اړیکه لري.

حل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{1 - 7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{2 - 5}{2 - 0} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$$

څرنګه چې $m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$ کېږي، نو د \overline{AB} او \overline{CD} مستقیم خطونه یو پر بل عمود دي.

پوښتنې

1- که $A(6,1)$ ، $B(8,3)$ او $C(6,5)$ د یو مثلث د راسونو وضعیه کمیات وي، وښایئ

چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

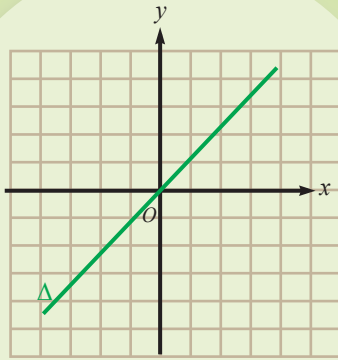
2- هغه مستقیم خط چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ له نقطو څخه تېرېږي، له هغه مستقیم خط

سره چې د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ له نقطو څخه تېرېږي، څه اړیکې لري.

3- هغه مستقیم خط چې د $A(2,4)$ او $B(7,5)$ له نقطو څخه تېرېږي، له هغه مستقیم خط

سره چې د $C(1,-4)$ او $D(-3,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي، څه ډول اړیکه لري؟

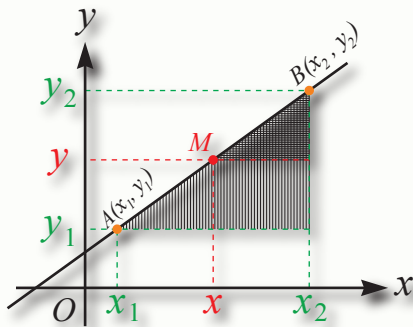
د یوه مستقیم خط معادله چې دوی نقطې یې معلومې وي



په مخامخ شکل کې د مستقیم خط پرمخ خو ټکي وټاکئ. د مستقیم خط پرمخ د ټاکل شوو نقطو د فاصلې او ترتیب ترمنځ څه اړیکه وینئ؟

فعالیت

• د وضعیه کمیاتو په سیستم کې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوی اختیاري نقطې وټاکئ.



• که د A او B نقطې یوه له بلې سره ونښلول شي، کوم شکل لاس ته راځي؟
 • د $M(x, y)$ یوه بله اختیاري نقطه د \overline{AB} مستقیم خط پرمخ وټاکئ.
 • د A, M, B له نقطو څخه د x او y په محورونو باندې عمود خطونه رسم او نوم پرې کېږدئ.

د پورتنۍ فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته لاندې پایله په لاس راځي:

د هغه مستقیم خط معادله چې د $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ او $M(x, y)$ له نقطو څخه تېرېږي

چې پر دې مستقیم خط پرتې وي، په لاندې ډول ده.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $A(3,4)$ او $B(2,-1)$ له نقطو څخه

تېرېږي.

حل: د هغه مستقیم خط د معادلې په مرسته چې د دې نقطې یې معلومې وي، کولای شو

ولیکو:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 4}{x - 3} = \frac{-1 - 4}{2 - 3} \Rightarrow \frac{y - 4}{x - 3} = \frac{-5}{-1} \Rightarrow \frac{y - 4}{x - 3} = 5$$

$$y - 4 = 5(x - 3)$$

$$y = 5x - 15 + 4 = 5x - 11$$

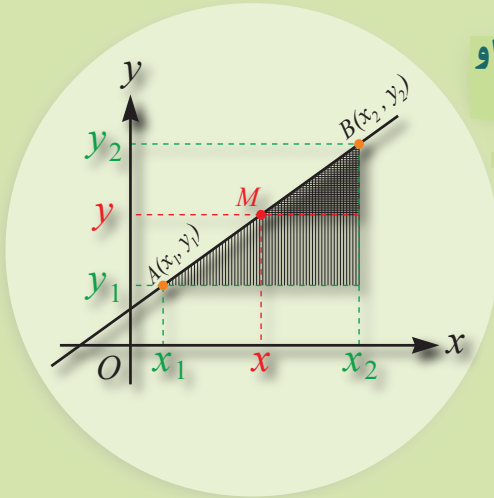
$$y = 5x - 11$$

پوښتنې

1- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $A(2,-1)$ او $B(3,4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

2- که د یوه مثلث راسونه د $A(1,3)$ ، $B(-1,4)$ او $C(5,6)$ نقطې وي، د دې مثلث د \overline{AM} میانې معادله پیدا کړئ.

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي



په مخامخ شکل کې د \overline{AB} د مستقیم خط میل د \overline{MA} د مستقیم خط له میل سره څه اړیکه لري؟
آیا د بل هر قطعه خط میل چې ددې مستقیم خط پر مخ پروت او یا له دې خط سره موازي وي، میل یې د \overline{AB} له مستقیم خط سره مساوي دی او که نه؟ که مساوي دی، نو ولې؟

پوهېږو د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{یا}$$

څرنگه چې $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ د مستقیم خط میل دی، نو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

اخیرنۍ معادله د هغه مستقیم خط معادله ده چې یوه نقطه $A(x_1, y_1)$ او میل (m) یې معلوم وي.

د هغه مستقیم خط معادله چې د (a, b) له نقطې څخه تېر شي او میل یې m وي، عبارت ده

$$\text{له: } y - b = m(x - a)$$

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې له $(2, 3)$ نقطې څخه تېر شي او میل یې

$$\left(\frac{1}{2}\right) \text{ وي.}$$

حل: څرنگه چې د مستقیم خط میل او یوه نقطه راکړل شوې ده، نو له

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{معادلې څخه لیکلای شو:}$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$2(y - 3) = (x - 2)$$

$$2y - 6 = x - 2$$

$$2y = x + 6 - 2$$

$$2y = x + 4 \Rightarrow \quad \text{یا} \quad 2y - x - 4 = 0$$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې m او د y محور د $(0, b)$ په نقطه کې قطع کړي، له $y = mx + b$ څخه عبارت ده.

دویم مثال: هغه دوه مستقیم خطونه چې $3x + 4y = 5$ او $4x - 3y = -1$ یې معادلې وي، یو له بل سره څه اړیکه لري.

حل: د دواړو مستقیمو خطونو د معادلو د ضریبونو په مرسته لیکلای شو:

$$a_1 = 3 \quad b_1 = 4 \quad c_1 = -5$$

$$a_2 = 4 \quad b_2 = -3 \quad c_2 = 1$$

1- څرنگه چې $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{-3}$ دی یا $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ، نو دا دواړه خطونه متقاطع دي.

2- څرنگه چې $\frac{3}{4} \times \frac{4}{-3} = -1$ یا $\frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2} = -1$ دی، نو دا دواړه مستقیم خطونه د

تقاطع په نقطه کې یو پر بل عمود دي.

پوښتنې

1- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې 4 او د y محور د 3- په نقطه کې قطع کړي.

2- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(5, -4)$ له نقطې څخه تېر شي او میل یې 2- وي.

3- د $4x + 3y - 1 = 0$ او $8x + 6y + 5 = 0$ خطونه یو له بل سره څه حالت لري؟

- د A او B دوو نقطو ترمنځ فاصله د $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له رابطې څخه لاسته راځي.
- د يوه مستقيم خط ميل له $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي.
- د موازی مستقيمو خطونو ميلونه سره مساوي دي.
- هر مستقيم خط چې د x له محور سره موازي وي، ميل يې صفر او هر مستقيم خط چې د x پر محور عمود وي، ميل يې تعريف شوی نه دی.
- دوه مستقيم خطونه هغه وخت يو پر بل عمود دي، چې د ميلونو د ضرب حاصل يې (-1) شي.
- A, B, C درې نقطې هغه وخت پر يوه مستقيم خط پرتې دي چې د \overline{AB} او \overline{BC} د قطعه خطونو ميلونه سره مساوي وي يا $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ شي.

د دریم څپرکي پوښتنې

• په لاندې پوښتنو کې هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب وټاکئ:

1- د دوو یو پر بل عمود خطونو د میلونو د ضرب حاصل مساوي په:

(a) (1) دی. (b) صفر دی. (c) تعریف شوی ندی. (d) منفي یو دی.

2- د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د y له محور سره یې د تقاطع نقطه معلومه وي، عبارت ده

له:

(a) $y = mx$ (b) $y = b$ (c) $y = mx + b$ (d) $y - y_1 = m(x - x_1)$

3- د هغه مستقیم خط معادله چې دوی نقطې یې معلومې وي، عبارت ده له:

(a) $y = mx + b$ (b) $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (c) $\frac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x - x_1}$ (d) $y = mx$

4- د A او B دوو نقطو تر ترمنځ فاصله، عبارت ده له:

(a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ (b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

(c) $AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$ (d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

5- د وضعیه کمیاتو د مبدا او یوې نقطې ترمنځ فاصله، عبارت ده له:

(a) $d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (b) $d = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$

(c) $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ (d) $d = \sqrt{x^2 - y^2}$

6- د یو مستقیم خط میل عبارت دی له:

(a) $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ (b) $m = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ (c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (d) $m = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

7- دوه مستقیم خطونه هغه وخت یو له بل سره موازي وي چې:

a: میلونه سره مساوي وي. b: میلونه یې سره مساوي نه وي.

c: د میلونو د ضرب حاصل یې منفي یو وي. d: درې واړه سم دي.

- خالي ځايونه په مناسبو کلماتو ډک کړئ.
- 1 - د وضعيه کمياتو په سيستم کې د X محور ته او د Y محور ته وايي.
- 2 - په دويمه ناحيه کې هغه نقطې پرته دي چې X مختصه يې او د Y مختصه يې ده.
- 3 - په دريمه ناحيه کې هغه نقطې پرته دي چې د X او Y دواړه مختصې دي.
- 4 - دوه موازي مستقيم خطونه چې د X د محور له مثبت جهت سره مساوي جوړه وي.
- 5 - د X له محور سره د هر موازي مستقيم خط ميل دی.
- 6 - درې نقطې هغه وخت په يوه مستقيم خط پرته وي، چې د هر قطعه خط ميلونه يې سره وي.
- 7 - که د دوو خطونو ميلونه يو له بله سره مساوي نه وي، دا دواړه خطونه سره دي.

• په لاندې جملو کې سمې جملې ته د(س) او ناسمې جملې ته د(ن) تورې وليکئ.

- 1- () د موازي مستقيمو خطونو ميلونه سره مساوي وي.
- 2- () دوه مستقيم خطونه هغه وخت يو پر بل عمود دي، چې د ميلونو ضرب حاصل يې $(+1)$ وي.
- 3- () د مستقيم خط عمومي معادله $y = mx$ ده.

• لاندې پوښتنې حل کړئ

1- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې لاندې راکړل شوي نقطې وټاکئ.

1: (0,1) 2: (2,3) 3: (0,-4) 4: (5,0)

2- د لاندې هرو جوړو نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ چې وضعیه کمیات یې راکړل شوي دي.

1: (0,9), (-5,4) 2: (4,1), (3,-2) 3: (-7,4), (1,-11)

3- وښیئ چې لاندې درکړل شوي نقطې د یوه قایم الزاویه مثلث راسونه دي او هم ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

1: (0,9) , (-4,-1) , (3,2)

4- وښیئ چې لاندې درکړل شوي نقطې د یوه مستقیم خط پر مخ پرتې دي.

1: (0,4) , (3,-2) , (-2,8)

5- د هغه مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې میل او یوه نقطه یې راکړل شوې ده.

1: (2,3) , $m = -\frac{1}{2}$ 2: (-4,1) , $m = -\frac{2}{3}$ 3: (-1,-4) , $m = -2$

6- که د یوه مستطیل راسونه (3,-1), (-1,3), (-3,1) او (1,-3) وي، ددې مستطیل مساحت پیدا کړئ.

7- که د یوه متوازي الاضلاع راسونه (2,4), (5,9), (4,9) او (1,4) وي، ددې متوازي الاضلاع د قطرونو اوږدوالی پیدا کړئ.

8- وښیئ چې د (-3,1), (-9,4), (12,0) او (6,3) د یوه متوازي الاضلاع راسونه دي.

9- که (5,0), (-3,2) او (1,-3) د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث د ضلعو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

10- د هغو مستقیمو خطونو معادله پیدا کړئ چې د $P(4,5)$ له نقطې څخه تېر شي، یو یې د x له محور سره او بل یې y له محور سره موازي وي.

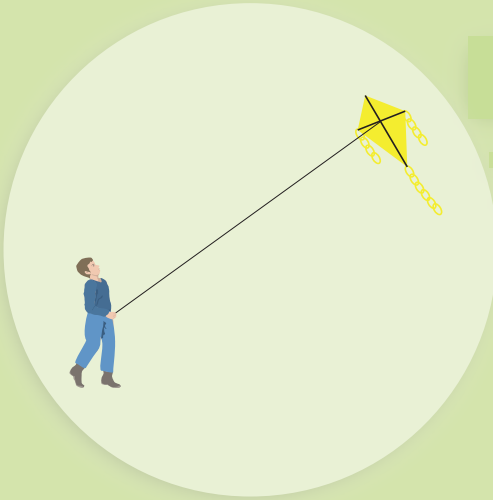


څلورم څپرکی مثلثات





د یوې حاده زاوې ساین



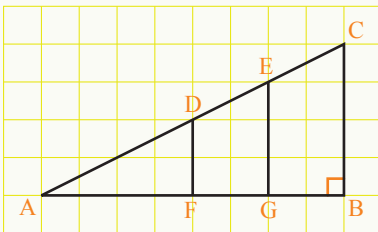
که یوه ګوډۍ (کاغذ پران) په هوا کې د الوتنې په حال کې وي، څرنگه کولای شي چې له ځمکې څخه یې لوړوالی پیدا کړي.

فعالیت

● د $\triangle ABC$ په قائم الزاویه مثلث کې مو د \overline{AC} پروتر د D او E دوې نقطې ټاکلي دي، له دې نقطو څخه د \overline{BC} له ضلعې سره د \overline{DF} او \overline{EG} موازي خطونه رسم کړئ.

● د خط کش په مرسته د مثلث د ضلعو اوږدوالی پیدا کړئ، د $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ او $\frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{AD}}$

نسبتونه پیدا او سره پرتله یې کړئ.



● آیا د D او E د نقطو د ځایونو په بدلولو سره د

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{AD}}$ نسبتونه هم تغیر کوي؟

● آیا د \overline{AC} د ضلعې پرمخ د نقطو د ځایونو

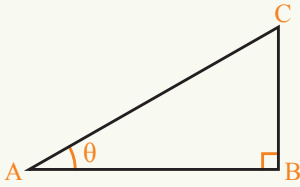
بدلولو سره د \hat{A} زاوې په مقدار کې تغیر راځي.

● اوس د \overline{AB} اوږدوالی ثابت وساتئ او د \hat{A} زاویه لویه کړئ په پورتنیو نسبتونو کې څه

تغیر راځي؟ وېې څېړئ.

تعريف

به هر قايم الزاويه مثلث کي د θ يوې حاده زاويې د مقابلې ضلعي اوږدوالی د وتر پر اوږدوالی هر وخت له يوه ثابت مقدار سره مساوي دی، دا ثابت مقدار د حاده زاويې په پراخوالي پورې اړه لري. دې نسبت ته د حاده زاويې $\sin\theta$ وايي.

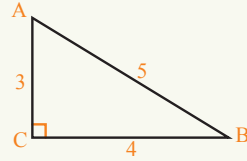


$$\sin\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ حاده زاويې د مقابلې ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}} = \frac{BC}{AC}$$

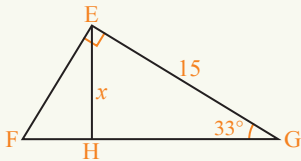
مثال: په لاندې شکل کي $\sin A$ او $\sin B$ په لاس راوړئ.
حل:

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{د } A \text{ زاويې د مقابلې ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \hat{A} = 0.8$$

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{د } B \text{ زاويې د مقابلې ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = 0.6$$



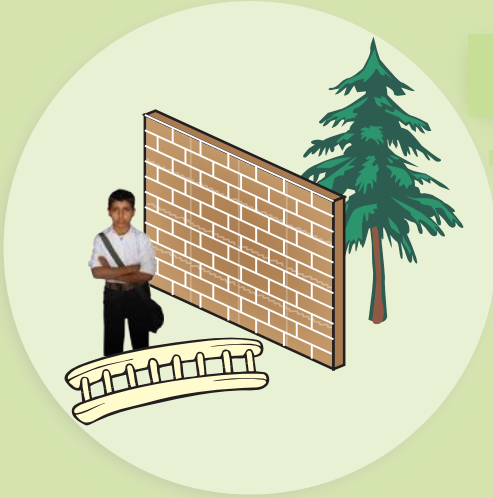
پوښتنې



1- که $\sin 33^\circ$ مساوي په 0.5446 وي، په لاندې شکل کي د x عددي قيمت پيدا کړئ.

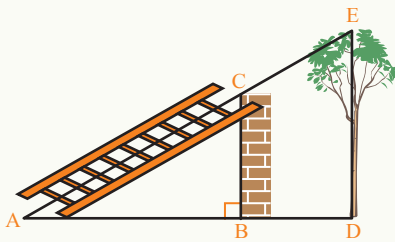
2- درې قايم الزاويه مثلثونه رسم چې په ترتيب سره د هر مثلث يوه، يوه حاده زاويه 40° ، 65° او 80° وي. د خط کش په مرسته د مثلثونو د ضلعو اوږدوالی پيدا کړئ. بيا $\sin 80^\circ$ ، $\sin 65^\circ$ او $\sin 40^\circ$ پيدا کړئ او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

د یوې حاده زاوېې کوساین



دیوه دیوال شاته د ناجو یوه ونه ولاړه ده. یو زده کوونکی غواړي، وپوهېږي چې ونه له دیوال څخه څومره فاصله لري. د دې کار لپاره یې یوازې یوه لنډه زینه درلوده. فکر وکړئ، هغه د څه په برخه کې فکر کوي؟

فعالیت



- په شکل کې د جوړ شوو مثلثونو نومونه وویایئ.
- \overline{BC} او \overline{DE} یو له بل سره څه اړیکه لري؟ ولې؟
- د زینې فاصله تر دیوال پورې او بیا تر ونې پورې پیدا کړئ.
- د تالس د قضیې په مرسته لاندې مساوات پوره کړئ او د \overline{AE} اوږدوالی په لاس راوړئ.

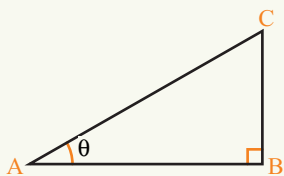
$$\frac{AB}{AC} = \frac{\dots}{AE}$$

- د \overline{AE} اوږدوالی په څه پورې اړه لري؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

تعریف

په عمومي ډول د $\triangle ABC$ په قایم الزاویه مثلث کې چې یوه حاده زاویه یې θ ده، د دې زاوېې د مجاورې ضلعې او د وتر د اوږدوالو تر منځ نسبت ته $\cos\theta$ وایي.



$$\cos \theta = \frac{\text{د } \theta \text{ زاويې د مجاورې ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

مثال: د AHB په قائم الزاويه مثلث کې که $\hat{A} = 30^\circ$ او $\hat{B} = 60^\circ$ وي، ونیسئ چې

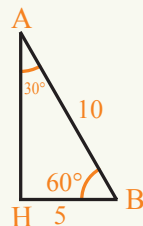
$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ او } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ دی.}$$

حل: د فیثاغورث د قضیې په مرسته د \overline{AH} ارتفاع کولای شو، داسې په لاس راوړو:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2$$

$$10^2 = \overline{AH}^2 + 5^2 \Rightarrow \overline{AH}^2 = 100 - 25 = 75$$

$$\overline{AH} = \sqrt{75} \Rightarrow \overline{AH} = 5\sqrt{3}$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

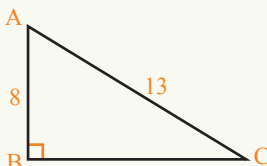
$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پوښتنې

1- د $30^\circ, 45^\circ$ او 60° زاويو لپاره $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړیکه وڅېړئ؟

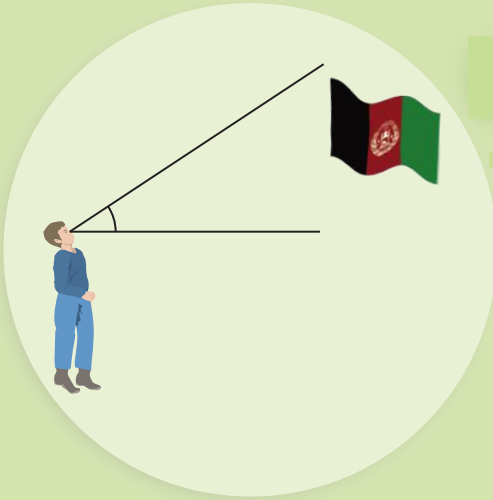
2- په لاندې قائم الزاويه مثلث کې د $\sin A$ او $\cos A$ عددي قيمت پيدا کړئ.



3- د $\triangle ABC$ په قائم الزاويه مثلث کې چې د ضلعو اوږدوالی یې 8,6 او 10 واحد وي، د

$\sin A$ او $\cos A$ مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

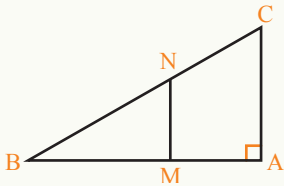
د یوې حاده زاوېې ټانجانټ



یوزده کوونکی د بیرغ مخکې ولاړ دی. فکر کوي چې د بیرغ د میلې اوږدوالی څنګه پیدا کړي؟

فعالیت

د $\triangle ABC$ په مثلث کې د A زاویه قایمه ده، $\sin B$ او $\cos B$ په پام کې ونیسئ، په داسې



حال کې چې \overline{MN} قطعه خط د \overline{AC} له خط سره موازي رسم شوی دی.

• د $\triangle ABC$ مثلث په پام کې نیولو سره ددې مثلث د ضلعو د اوږدوالی له مخې $\sin B$ او $\cos B$ ولیکئ.

• د $\triangle ABC$ مثلث د اضلعو له مخې د $\frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$ نسبت ولیکئ.

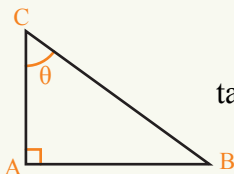
• د $\triangle BMN$ مثلث د اضلعو له مخې د $\sin B, \cos B$ او $\frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}}$ ولیکئ.

• څه فکر کوئ که په پورتنی مثلث کې $\frac{\cos B}{\sin B}$ پیدا کړو، ایا دا نسبت د مثلث ضلعو پر

اوږدوالي پورې اړه لري او که یوازې د θ په زاوېې د پراخوالي پورې اړه لري؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي:

لومړې پایله: په یوه قایم الزاویه مثلث کې د یوې حاده زاوېې د مقابلې او مجاورې ضلعو د اوږدوالي نسبت یو ثابت مقدار دی چې ددې حاده زاوېې د ټانجانټ په نوم یادېږي.



$$\tan \theta = \frac{\text{د } \hat{\theta} \text{ زاوېې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{د } \hat{\theta} \text{ زاوېې د مجاورې ضلعې اوږدوالی}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

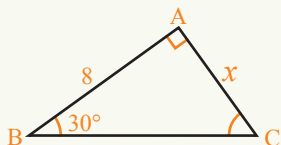
دویمه پایله: د θ حاده زاوې پانجانټ د دې زاوې د سین او کوساین له نسبت سره مساوي دی:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

دریمه پایله: $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ نسبت یو بل مقدار دی چې د حاده زاوې کوپانجانټ ($\text{Cotangent} \theta$) په نامه یادېږي یا په بل عبارت د θ د مجاورې او مقابلې ضلعي د اوږدوالي نسبت ته $\cot \theta$ وايي.

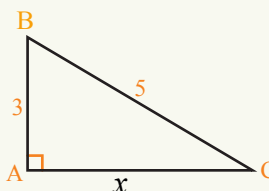
دا نسبت هم د نورو نسبتونو په شان یوازې د θ د زاوې په پراخوالي پورې اړه لري.

لومړی مثال: د شکل له مخې که په دې مثلث کې $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ وي، د $\tan 30^\circ$ قیمت پیدا کړئ.



حل: د $\tan \theta$ د تعریف په مرسته کولای شو چې ولیکو:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \div 8 = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



دویم مثال: د $\triangle ABC$ قایم الزاویه مثلث چې لاندې رسم شوی دی،

په دې مثلث کې $\sin \theta$, $\cos \theta$, او $\tan \theta$ په لاس راوړئ او د $\cot \theta$

سره پرتله کړئ.

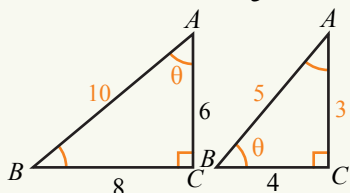
حل: لومړی د فیثاغورث د قضیې په مرسته د $\triangle ABC$ په مثلث کې د AC اوږدوالی پیدا کوو.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5} \quad \cos \theta = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan \theta = \frac{3}{4} \quad , \quad \cot \theta = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \quad \tan \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$



پوښتنې

1- په مخامخ شکلونو کې $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ او $\cot \theta$ پیدا کړئ.

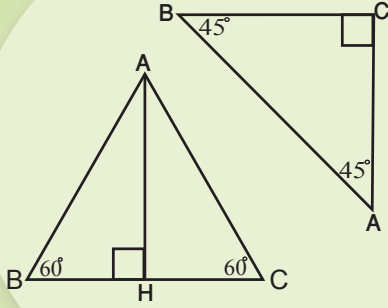
2- د $\triangle ABC$ په متساوي الاضلاع مثلث کې $\tan \hat{A}$ او $\tan \hat{B}$ پیدا کړئ.

3- په یوه قایم الزاویه مثلث کې که قاعده ثابت وي او حاده زاویه یې لویه شي، د $\tan \theta$ په مثلثاتي

نسبت کې څه تغیر راځي؟

د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

(90° او $45^\circ, 60^\circ, 30^\circ$)



د مخامخ شکل مثلثونه څه ډول مثلثونه دي، د ضلعو اوږدوالی یې پیدا کړئ.

فعالیت

- د $\triangle ABC$ یو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ.
 - د \overline{AH} ارتفاع رسم کړئ، په دې ډول مثلثونو کې ارتفاع کوم خاصیتونه لري؟
 - د فیثاغورث د قضیې په مرسته ددې مثلث دارتفاع اوږدوالی پیدا کړئ.
 - آیا د 30° او 60° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کولای شئ.
 - د $\triangle ABC$ یو قائم الزاویه متساوي الساقین مثلث رسم کړئ، چې د هرې مساوي ضلعې اوږدوالی یې یو واحدوي.
 - هره حاده زاویه څو درجې ده؟ ولې؟ د وتر اوږدوالي یې پیدا کړئ.
 - د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.
- د پورتنی فعالیت د سرته رسولو لپاره کولای شو چې له لاندې جدول څخه کار واخلو.

زاویې مثلثاتي نسبتونه	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف شوی نه دی

مثال: په لاندې اړیکو کې د x او y عددي قیمتونه پیدا کړئ.

1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$

2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$

3) $x = \tan 60^\circ - \sin 30^\circ$

4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ$

5) $x = \tan 45^\circ - \sin 45^\circ$

6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$

حل: په پورتنیو اړیکو کې د هر مثلثاتي نسبت په ځای عددي قیمت وضع کوو:

1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

3) $x = \tan 60^\circ - \sin 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2}$

4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6}$

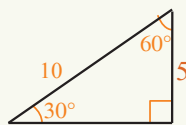
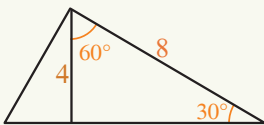
5) $x = \tan 45^\circ - \sin 45^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3}$

یادونه: په هر قایم الزویه مثلث کې لرو چې: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

پوښتنې

په لاندې شکلونو کې د 30° او 60° زاویو د \sin, \cos, \tan او \cot مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.



• مثلثات (Trigonometry) له دوو يوناني کلمو څخه چې (Trigon) مثلث او (Metron) د اندازه کولو په معنا دی. هغه علم دی چې د مثلث د عناصرو ترمنځ اړيکې مطالعه کوي.

• په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مقابلې ضلعي اوږدوالي د وتر پر اوږدوالي د حاده زاويې د ساين (sin) په نامه يادېږي.

• په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مجاورې ضلعي اوږدوالي د وتر پر اوږدوالي د حاده زاويې د کوساين (cos) په نامه يادېږي.

• په هر قايم الزاويه مثلث کې د θ حاده زاويې د sin او cos مثلثاتي نسبتونو نسبت د θ حاده زاويې د tan په نامه يادېږي $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$.

• په هر قايم الزاويه مثلث کې د θ حاده زاويې د cos او sin مثلثاتي نسبتونو نسبت د θ حاده زاويې د cot په نامه يادېږي $\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$.

• په هر قايم الزاويه مثلث کې د $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړيکه صدق کوي.

• د sin, cos او tan مثلثاتي نسبتونه پرته له زاويې معنا نلري.

• د $\sin 30^\circ$ قيمت له $\cos 60^\circ$ قيمت سره برابر دی.

• د $\cos 30^\circ$ قيمت له $\sin 60^\circ$ قيمت سره برابر دی.

• د $\cos 45^\circ$ قيمت له $\sin 45^\circ$ قيمت سره برابر دی.

د څلورم څپرکی پوښتنې

• په لاندینيو پوښتنو کې له څلورو ځوابونو څخه سم ځواب په نښه کړئ.

1- د یوې حاده زاوېې $\sin \alpha$ عبارت دی له:

(a) $\frac{\text{د حاده زاوېې د مقابلې ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}}$ (b) $\frac{\text{د حاده زاوېې د مجاورې ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}}$ (c) $\frac{\text{د وتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاوېې د مجاورې ضلعي اوږدوالی}}$ (d) $\frac{\text{د حاده زاوېې د مقابلې ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}}$

2- د $\tan \alpha$ نسبت مساوي دی په:

(a) $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ (b) $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ (c) $\frac{1}{\sin \alpha}$ (d) $\frac{1}{\cos \alpha}$

3- د $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ افادې قیمت برابر دی په:

(a) 1 (b) 2 (c) -2 (d) -1

4- $\sin 45^\circ$ او $\cos 45^\circ$ قیمت مساوي دی په:

(a) 1 (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (d) $\sqrt{2}$

5- د $\frac{\sin 30^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ + \sin 30^\circ}$ افادې قیمت برابر دی په:

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) درې واړه ځوابونه سم دي.

• تش ځايونه په مناسبو کلمو ډک کړئ.

- 1- په يوه قايم الزاويه مثلث کې د دوو حاده زاويو مجموعه ده.
- 2- د يوې حاده زاوې ساين عبارت دی له.....
- 3- Trigonometry له دوو يوناني کلمو..... او څخه جوړه شوې ده.
- 4- د $\tan\theta \cdot \cot\theta$ د ضرب حاصل مساوي دی په.....

• په لاندې جملوکې د سمې جملې مخې ته (س) او د ناسمې جملې مخې ته (ن) توری وليکئ.

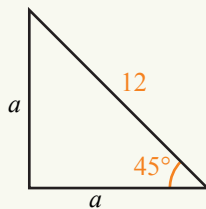
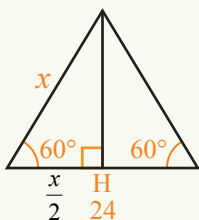
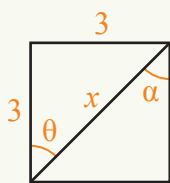
1- () د $\sin\theta$ نسبت مساوي دی په $\frac{\text{د مقابلې ضلعي اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}}$ دی.

2- () $\sin 30^\circ$ او $\cos 60^\circ$ يو بل سره مساوي دي.

3- () د $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ نسبت د $\cot\theta$ سره برابر دی.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- په لاندې شکلونو کې د ورکړل شوو زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.



2- په لاندینیو پوښتنو کې د A او B قیمتونه پیدا کړئ.

1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$

6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$

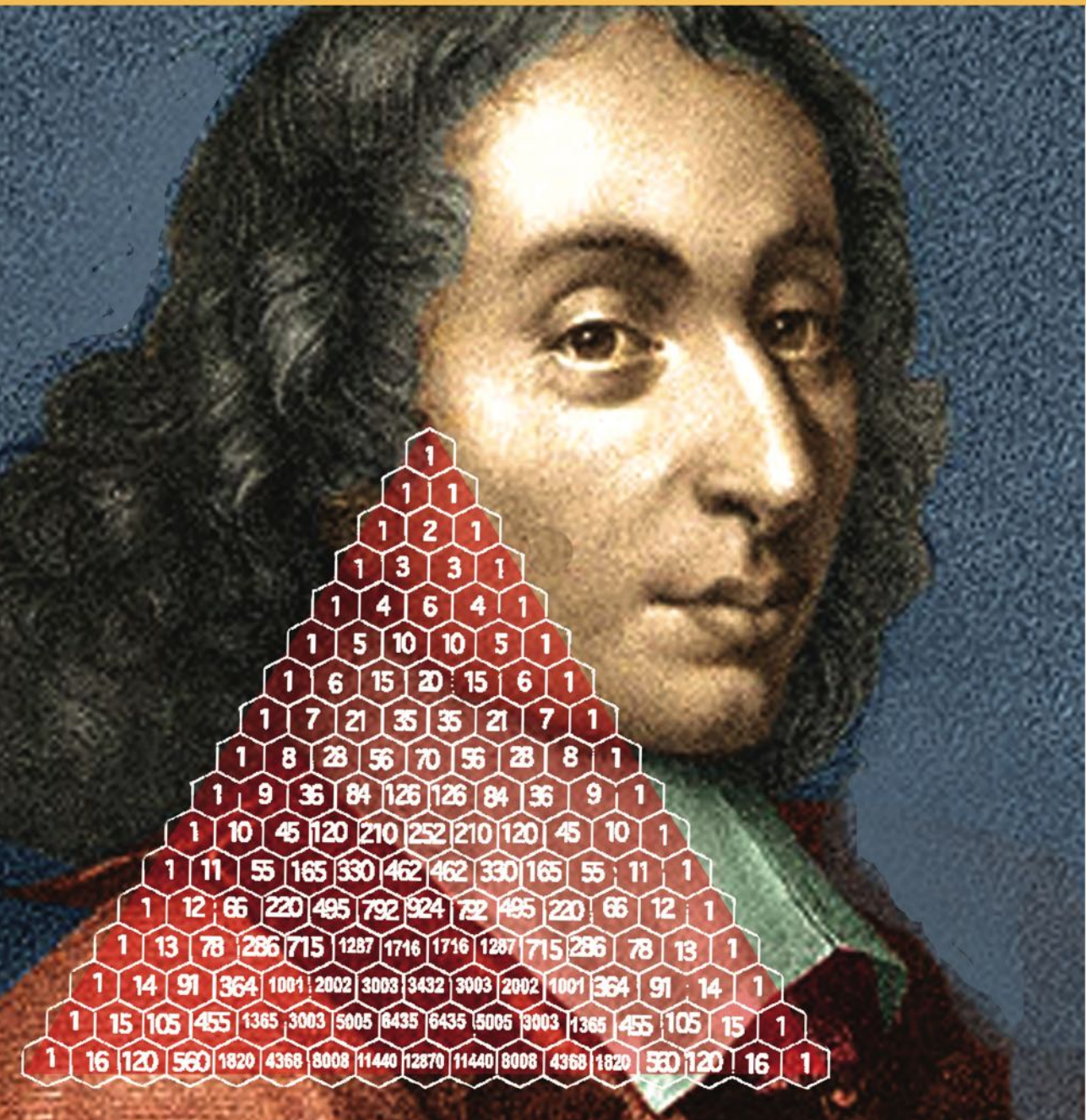
9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

3- که $\sin \alpha = \frac{7}{12}$ وي $\cos \alpha$ او $\tan \alpha$ پیدا کړئ.

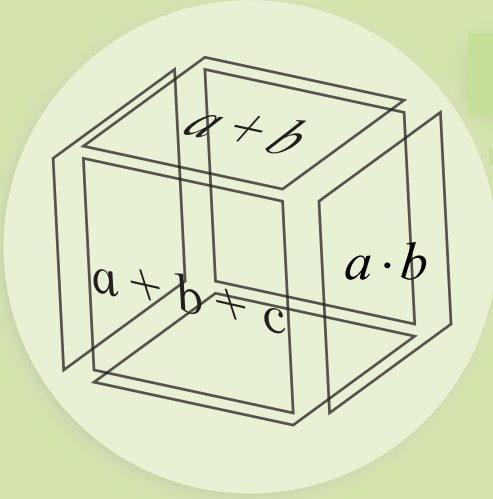
4- که $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي $\sin \alpha$ او $\tan \alpha$ پیدا کړئ.

پنجم ڇپرڪي
الجبري افادي

بلز پاسکال، عالم، ادیب، دیني فیلسوف، ریاضي پوه، فزیک پوه، او د نړۍ د متفکرینو له جملې څخه دی چې د فرانسې په مرکز کلرمون کې زېږدلی دی. څرنگه چې د په ریاضیاتو کې ډیر زیات استعداد درلود. د احتمالاتو نظریه د اقلیدسي هندسی قضیې د تصویری هندسی قضیې، د پاسکال قضیه، د حساب لومړنی ماشین، د پاسکال مثلث یا د دوه حدو د ضریبونو گراف، د انتیگرال او دیفرنسل حساب او د سیکلوئید منحنی گانو ځینې خاصیتونه د ده پورې منسوب دي چې نوموړی په 1662 کال کې وفات شوه.



1																
1	1															
1	2	1														
1	3	3	1													
1	4	6	4	1												
1	5	10	10	5	1											
1	6	15	20	15	6	1										
1	7	21	35	35	21	7	1									
1	8	28	56	70	56	28	8	1								
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1							
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1						
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1					
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1				
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1			
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1		
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1	
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1



د مخامخ شکل په سطحو د لیکل شوو الجبري افادو نومونه ووايئ.

فعالیت

لاندې افادې پام کي ونیسئ:

a) $2x$ b) $\frac{1}{3}xy^3$ c) $\sqrt{2}xym'$ d) $9x^2$

e) $5x$ f) $2xy^3$ g) $3x^2$ h) $\frac{4x^2}{x-1}$

• مشابه یو حده افادې په نښه کړئ.

• لاندې الجبري افادې تر څو چې امکان لري، ساده کړئ.

a) $2x + 6x^2 + \sqrt{2}xym^4$ b) $3x^2 + 6x^2$ c) $\frac{1}{3}xy^3 + 2x$ d) $\frac{1}{3}xy^3 + 2xy^3$

• هغه الجبري افادې چې ساده کیدای نشي، څرنگه باید ولیکل شي، د هرې افادې لپاره کوم نوم لازم گڼئ.

• په هر حالت کې نظر x ته د افادو تر ټولو لوړ توان وټاکئ.

له پورتنی فعالیت څخه کولای شو ولیکو چې:

که چیرې په یوه الجبري افاده کې د مشابه حدونو له ساده کولو څخه وروسته یوازې یو حد ولرو، نو داسې الجبري افادې ته یو حده (Monomial) که دوه یو حدې د جمعې یا تفریق په حالت کې ولرو، نو دوه حده (Bionomial) او که درې یو حدي د جمعې یا تفریق په حالت کې ولرو، نو درې حده (Trinomial) ورته وایي او هغه یو یا څو حده الجبري

افاده ې د تورو (متحولینو) توانونو ېې د مکملو عددونو $C = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ په سټ کې شامل وي، (Polynomial) یا (Polynome) نومېږي. که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوي وي، ددې توري لوړ توان د پولینوم درجه ده او که له څو تورو څخه جوړ شوي وي، د لوړې درجې لرونکي یو حدې درجه د پولینوم درجه ده او درجه ېې نظر هر توري ته د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده.

مثال: لاندې جدول بشپړ کړئ.

الجبري افادې	نومونې				د الجبري افادې درجه	
	څو حده	درې حده	دوه حده	یو حده	نظر Y ته	نظر X ته
$\sqrt{32}y^2 - 3y + 2y^3$						
$3x^2 - 7x$			✓			2
$6x^2 - 4x - 1$						
$0.4x^2y - 2x^4 + 16y^2$						
$13x - 2y^3 + 6x^3y$						
$3 - 5 + x^2 - y^3 - 2xy$						
$4x^2 - 2x + 6x^2 - 5x$						

پوښتنې

1- لاندې الجبري افادې ساده کړئ او نظر هر توري (متحول) ته ېې درجې وټاکئ.

a) $x^2 - 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x$

b) $\sqrt{2}mn^2 - \frac{1}{2}m + 2\sqrt{2}n^2m + 3m$

2- لاندې الجبري افادې، څو حده دي، د هرې یوې درجه نظر هر متحول ته وټاکئ.

a) $6x^2 - 4x - 12xy^6 - 2x^5$

b) $8x^6 - 4xy^6 - 5x^2$

3- A او B په الجبري افادو کې مشابه حدونه وښيي او افادې ساده کړئ.

$$A = 4xy + 2x^2y - 3xy^2 - \sqrt{2}xy - 0.5x^2y - \frac{1}{2}xy^2$$

$$B = \frac{4}{3}a^2b - a^2 + b^2 - 0.7a^2b - 2a^2 - 3b^2 + xy$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

د دوه حده افادو ضرب

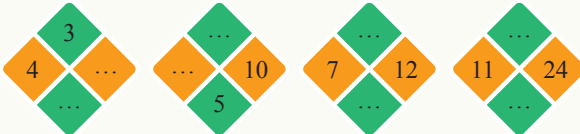
که چیرې a او b دوه عددونه وي، د مخامخ قوسونو د ضرب له حاصل څخه وویای چې د دوو عددونو د جمعې او ضرب حاصل له کومو عددونو سره برابر دی.

فعالیت

• په هره مربع کې، د عددونو ترمنځ څه ډول اړیکه شته؟



• د پورتنۍ اړیکې په مرسته لاندې تش ځایونه ډک کړئ:



$(x+4)(x+3) = x^2 + \dots x + \dots x + \dots = x^2 + \dots x + \dots$



$(x-3)(x+2) = x^2 + \dots x - \dots x - \dots = x^2 - \dots x - \dots$



$x^2 + 8x + 12 = (x + \dots)(x + \dots)$

$x^2 + x - 6 = (x - \dots)(x + \dots)$

له پورتنی فعالیت څخه لیدل کېږي چې:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \times b$$

مثال: د ضرب لاندې عملیې سرته ورسوئ:

a) $(t-4)(t+5)$

b) $(a+3)(a+4)$

c) $(x-4)(x+2)$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$

حل:

a) $(t-4)(t+5) = t^2 + (-4+5)t + (-4 \times 5) = t^2 + t - 20$

b) $(a+3)(a+4) = a^2 + (3+4)a + (3 \times 4) = a^2 + 7a + 12$

c) $(x-4)(x-2) = x^2 + (-4-2)x + (-4 \times -2) = x^2 - 6x + 8$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2}) = y^2 + (\frac{2}{3}+\frac{1}{2})y + (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}) = y^2 + \frac{7}{6}y + \frac{2}{6}$

پوښتنې

لاندې الجبري افادې سره ضرب کړئ.

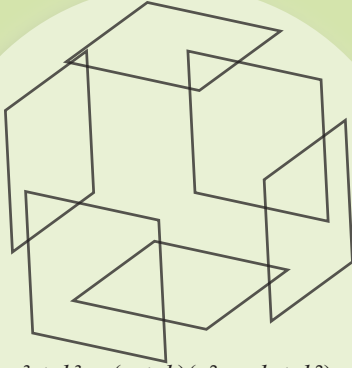
a) $(2x-1)(x+3)$

b) $(\sqrt{2}+x)(x-\sqrt{2})$

c) $(a-3)(a+4)$

d) $(0.5xm - \frac{1}{2})(4xm + 0.5)$

د مکعبونو مجموعه او تفاضل



$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

مخامخ شکل ته وگورئ دا سطحې کوم
منظم هندسي شکل جوړوي؟

فعالیت

لاندې جدول ډک کړئ:

a	b	$a^3 + b^3$	$(a + b)$	$a^2 - 2ab + b^2$	$(a + b)(a^2 - 2ab + b^2)$
5	2				
4	1				
-3	2				
3	-2				
4	4				

- د $a^3 + b^3$ او $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ستونونو لاندې کومه اړیکه وینئ.
- آیا کولای شئ همدارنگه یوه اړیکه د $a^3 - b^3$ لپاره هم ولیکئ.

له پورتي فعالیت څخه کولای شو، نتیجه واخلو چې:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

کولای شو چې دا اړیکې په الجبري ډول ثبوت کړو:

$$\begin{aligned} (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2) \\ &= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2) \\
&= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \\
&= a^3 - b^3
\end{aligned}$$

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې د $a^3 + b^3$ او $a^3 - b^3$ د مطابقتونو پر اساس تجزيه کړئ.

a) $b^3 - 8$ b) $a^6b^6 - x^3y^3$ c) $h^3 + \frac{1}{h^3}$

حل: لومړی الجبري افادې د $a^3 \pm b^3$ په شکل لیکو، بیا یې د مطابقتونو په مرسته تجزيه کوو:

a) $b^3 - 8 = b^3 - 2^3 = (b-2)(b^2 + 2b + 4)$
b) $a^6b^6 - x^3y^3 = (a^2b^2)^3 - (xy)^3 = (a^2b^2 - xy)(a^4b^4 + a^2b^2xy + x^2y^2)$
c) $h^3 + \frac{1}{h^3} = h^3 + \left(\frac{1}{h}\right)^3 = \left(h + \frac{1}{h}\right)\left(h^2 - 1 + \frac{1}{h^2}\right)$

دویم مثال: د $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$ افاده ساده کړئ:

حل: لومړی د صورت مطابقت ته انکشاف ورکوو:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = x - y$$

پوښتنې

لاندې افادې د مطابقتونو په مرسته تجزيه کړئ:

a) $a^6b^6 + x^3y^3$ b) $8 + b^3$ c) $x^{12} - y^{12}$
d) $125x^3 + y^3$ e) $0.125x^3 - 1$ f) $\frac{1}{x^3} + 1$
g) $8 - 64a^3b^6$ h) $8a^3 - 27b^3$ i) $b^6 - 1$

$$\frac{2xy^2 - 4x^2y^4}{-2xy^2} = ?$$

پام وکړئ چې د مخرج افاده د صورت په کومې افادې پورې اړه لري، کولای شئ چې ساده یې کړئ.

فعالیت

- کله چې د $\frac{995}{7}$ په شان کسر چې نوريې ساده یا اختصار کولای نه شو، نو څه باید وکړو؟
- لاندې الجبري افادې تر څو چې امکان لري ساده یې کړئ.

a) $\frac{2m^2y - 3x^3y^4 + 24xy^3}{-3xy^2}$, $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ b) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, $x \neq 2$

c) $\frac{x^3 - x^2 - x - 6}{x + 2}$, $x \neq -2$

- لاندې عملیو ته پاملرنه وکړئ او ووايئ چې د هغو په حلولو کې یو په بل پسې څه کار سرته رسیدلای دی؟ ولې؟

$$\begin{array}{r} a) \quad 995 \quad | \quad 7 \\ -7 \quad | \quad 142 \\ \hline 29 \\ 28 \\ \hline 15 \\ 14 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad x^3 - 2x^2 - 11x - 6 \quad | \quad x + 2 \\ \pm x^3 \pm 2x^2 \\ \hline -4x^2 - 11x \\ \mp 4x^2 \mp 8x \\ \hline -3x - 6 \\ \mp 3x \mp 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

- د (a) برخې په پوښتنه کې مو ولې د وېش عملیه له کینې خوا له لومړي رقم ۹ څخه پیل کړه؟
- فکر وکړئ چې د (b) برخې په پوښتنه کې مو ولې له x^3 څخه د وېش عملیه پیل کړئ ده؟

له لورې توان څخه کوچنی توان ته د یو پولینوم لیکلو ته د پولینوم نزولي ترتیب وایي.

یو پر بل د دوو الجبري افادو په وېش کې لاندې پړاوونه سرته رسوو:

- ۱- د مقسوم او مقسوم علیه پولینومونه په نزولي ډول ترتیبوو.
- ۲- د مقسوم لومړي حد د مقسوم علیه په لومړي حد وېشو چې حاصل یې د وېش د حاصل لومړي حد دی.
- ۳- د خارج قسمت دا لومړي حد د مقسوم علیه په هر حد کې ضربوو، د ضرب حاصل د مقسوم له مشابه حدونو څخه تفریقوو.
- ۴- د مقسوم بل حد راښکته کوو، د پاتې افادې څنګ ته یې لیکو او بیا ددې افادې له کینې خوا لومړي حد د مقسوم علیه په لومړي حد وېشو او حاصل یې د مقسوم علیه په ټولو حدونو کې ضربوو او حاصل یې له پاتې افادې څخه تفریق کوو.
- ۵- دویم، دریم او څلورم پړاو ته ترهغه ادامه ورکوو چې د پاتې (باقیمانده) صفر او یا یې درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یوه په اندازه کمه شي.

لومړی مثال: د $x^3 - 3x^2 - 23x + 30$ الجبري افاده د $x - 6$ په الجبري افادې وویشئ.

د وېش پړاوونه

$$\left. \begin{array}{l} I - \frac{x^3}{x} = x^2 \\ II - \frac{3x^2}{x} = 3x \\ III - \frac{-5x}{x} = -5 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - 23x + 30 & x - 6 \\ \underline{= x^3 \mp 6x^2} & x^2 + 3x - 5 \\ & 3x^2 - 23x \\ \underline{= 3x^2 \mp 18x} & \\ & -5x + 30 \\ \underline{\mp 5x \pm 30} & \\ & 0 \end{array}$$

دویم مثال: $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4$ الجبري افاده پر $x^2 - x - 4$ الجبري افادې ویشی. **حل:** دمقسوم او مقسوم علیه پولینومونه په نزولې ډول ترتیبوو او بیا د ویش عملیه سرته رسوو.

د ویش پړاوونه	$\begin{array}{r} x^5 + 0x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4 \\ \underline{-(x^3 + x^2 + 3x + 8)} \\ x^4 + 2x^3 + x^2 - 8x + 4 \\ \underline{-(x^4 + x^3 + 4x^2)} \\ 3x^3 + 5x^2 - 8x + 4 \\ \underline{-(3x^3 + 3x^2 + 12x)} \\ 8x^2 + 4x + 4 \\ \underline{-(8x^2 + 8x + 32)} \\ 12x + 36 \end{array}$
I - $\frac{x^5}{x^2} = x^3$	
II - $\frac{x^4}{x^2} = x^2$	
III - $\frac{3x^3}{x^2} = 3x$	
IV - $\frac{8x^2}{x^2} = 8$	

لکه څرنګه چې د دوو عددونو د ویش د عملیې د آزمایشولو لپاره مو دوه شرطونه وڅېړل، نو د دوو الجبري افادو د ویش د آزمایشولو لپاره هم باید لاندې دوه شرطونه وڅېړل شي.

- 1- که د ویش د حاصل او مقسوم علیه د ضرب له حاصل سره پاتې (باقیمانده) جمع شي، نو د مقسوم سره مساوي شي.
 - 2- د پاتې (باقیمانده) درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه باید کوچنی وي.
- لکه په دویم مثال کې:

$$\begin{aligned} &(x^2 - x - 4)(x^3 + x^2 + 3x + 8) + 12x + 36 \\ &= x^5 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4 \end{aligned}$$

په پایله کې ویلای شو چې د مقسوم علیه درجه نظر x ته له ۲ سره برابره ده او د پاتې درجه (۱) ده، نو په لاس راغلي پایله سمه ده.

دریم مثال: د $2x^2 + x^4 - 3x + 1$ الجبري افاده په $x + 3$ الجبري افادې ویشئ.

حل: لومړی د مقسوم اومقسوم عليه افادې په نزولي ډول ترتیبوو:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 0 \cdot x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x + 3 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 11x - 36 \end{array} \right. \\
 \hline
 -x^4 \pm 3x^3 \\
 \hline
 -3x^3 + 2x^2 \\
 \mp 3x^3 \mp 9x^2 \\
 \hline
 11x^2 - 3x \\
 \pm 11x^2 \pm 33x \\
 \hline
 -36x + 1 \\
 \mp 36x \mp 108 \\
 \hline
 +109
 \end{array}$$

پوښتنې

د لاندې افادو د وېش حاصل په لاس راوړئ او بیا یې ځوابونه وازمائئ.

1) $(2t^3 - 4t^2 - 2t - 6) \div (t^2 + 9t + 7)$

2) $(1 - x^2 - x) \div (1 - x)$

3) $(2y^3 + y - 3y) \div (y^2 - 3y - 1)$

4) $(2x^3 + 5x^2 - x - 1) \div (x + 3)$

د پنځم څپرکی لنډیز

• هغه الجبري افاده چې له یوه حد څخه جوړه شوې وي، مونوم یا یو حده نومېږي، لکه:

$$-5x^3y^2, 2x, ax^n$$

• هغه الجبري افاده چې له دوو حدونو څخه جوړه شوې وي، دوه حده یا باینوم بلل کېږي،

$$\text{لکه: } ax^2 + b$$

• هغه الجبري افاده چې له دريو حدونو څخه جوړه شوې وي، درې حده یا ترینوم بلل

$$\text{کېږي، لکه: } ax^2 + bx + c$$

• هغه یو یا څو حده الجبري افادې چې د حروفو (متحولینو) توانونه یې د مکملو

عددونو په سټ کې شامل وي، د پولینوم په نامه یادېږي لکه: $x, -2x^2, x^{12}$ او

$$ax^5 + bx^3 + cx^2 - x - d$$

• په یوه الجبري افاده کې د یوه متحول تر ټولو لوی توان نظر هغه متحول ته د پولینوم له درجې

څخه عبارت ده.

• د پولینوم له لورې توان څخه کوچنی توان ته د پولینوم ترتیب ته د پولینوم نزولي ترتیب

وایي.

• د مکعبونو مجموعه او تفاضل

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

دینچم خپرکی پوښتنې

- په لاندې پوښتنو کې هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه درکړل شوي، سم ځواب یې وټاکئ.

1- د $(x-2)(x+3)$ د ضرب حاصل عبارت دی له:

(a) $x^2 + 5x + 6$ (b) $x^2 - 5x - 6$

(c) $x^2 + x - 6$ (d) $x^2 - x + 6$

2- د $\frac{2x-4x^3+x^2+16x-8}{2x^2-8}$ د وېش حاصل عبارت دی له:

(a) $-2x+1$ (b) $(-2x+1)(2x) + \frac{-2x}{2x^2-8}$

(c) الف او ب (d) هیڅ یو

3- د $6x^2y^6m^9$ الجبري افاده څو حده ده:

(a) درې حده ده. (b) شپږ حده ده

(c) یو حده ده (d) دوه حده ده

• تش ځايونه په مناسبو جملو او کلمو سره ډک کړئ.

1- د $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ الجبري افاده درجه افاده ده.

2- د $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ وېش حاصل له څخه عبارت دی.

3- د $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ دضرب حاصل عبارت له دی.

$$a^3 + b^3 = (\dots) (\dots) - 4$$

5- په هره الجبري افاده کې د يو توري (متحول) د هغه الجبري افادې درجه نظر دې ته بلل کېږي.

• له لاندینيو جملو څخه کومه سمه او کومه ناسمه ده، د سمې په مقابل کې د (س) او د ناسمې په مقابل کې د (ن) توری وليکئ.

1- () هغه الجبري افاده چې له يو يا څو حدونو څخه جوړه شوې وي او د تورو (متحولينو) توانونه يې د مکملو عددونو په ست کې شامل وي، د پولينوم په نامه يادېږي.

$$a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2) () - 2$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) () - 3$$

4- () د يوې الجبري افادې ترتيبولو ته له لورې توان څخه کوچني توان ته، د الجبري افادې نزولي ترتيب وايي.

• لاندې پوښتنې حل کړئ

1- ساده یې کړئ

a) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$

b) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

c) $\frac{a^2b^{-2} - b^2a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

2- ویې ویشئ:

a) $\frac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$

b) $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$

c) $2x^3 - x^2 - 4 \div (x - \frac{1}{2})$

d) $(x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$

e) $x^2 - 5x + 64 \div (-x + 5)$



شپریم چیرکی
غیر مساوات



غير مساوات Inequality



تله په کوم حالت کې ده؟ ولې؟

په ورځني ژوند کې د نابرابرو کمیتونو پر تله کولو ته اړتیا لرو، لکه: د یوه ټولګي د زده کوونکو د نمره مجموعه له ډېرو څخه لږو نمره ته ترتیبېږي، ایا تاسو کولای شئ چې د ورځني ژوند داسې نور مثالونه راوړئ چې نابرابره کمیتونه سره پر تله شوې وي. **څه وخت چې عددونه د ($>$, $<$, \geq , \leq) علامو په مرسته سره اړیکې ولري، د نابرابرو کمیتونو په نامه یادېږي، لکه: $5 > 4$, $18 \leq 18$ او $2 < 3 - \dots$**

فعالیت

• د $3, \frac{-3}{2}, \sqrt{2}, -4$ او $\frac{2}{3}$ عددونو ځای (موقعیت) د عددونو د محور پر مخ وټاکئ.



- د مناسبو علامو په کارولو، پورتنی عددونه په ترتیب سره له کوچني څخه تر لوی پورې ولیکئ.
- د عددونو د ترتیب او د محور پر مخ د عددونو د موقعیت ترمنځ څه اړیکه لیدل کېږي.

د پورتنی فعالیت پایله په لاندې ډول داسې لاندو:

د عددونو پر محور کوم عدد چې د بل عدد ښي خوا ته پروت وي، له هغه عدد څخه چې کینې خوا ته پروت دی، لوی دی، په عمومي ډول که a, b او c درې حقیقي عددونه وي، نو لیکلای شو چې:

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

فعالیت

• دوه غیر مساوي عددونه وټاکئ او د دوی ترمنځ اړیکه د لویې یا کوچنۍ علامې په واسطه وواښئ.

• د پورتنۍ غیر مساوات دواړو خواوو ته د ۵ عدد جمع کړئ، آیا د غیر مساوات په جهت (لوري) کې تغیر راځي؟
 • د پورتنۍ غیر مساوات له دواړو خواوو څخه ۳ عدد تفریق کړئ، آیا د غیر مساوات په لوري (جهت) کې تغیر راځي؟

په عمومي ډول د پورتنۍ فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو.

که $a < b$ وي، نو د a, b او c ټولو حقيقي عددونو لپاره لرو چې:

$$a + c < b + c$$

$$a - c < b - c$$

فعالیت

• دوه غیر مساوي عددونه وټاکئ او د هغوی ترمنځ اړیکه د ($<$) علامې په مرسته وواښئ.
 • د پورتنۍ غیر مساوات دواړه خواوې د ۴ په عدد کې ضرب کړئ، آیا د غیر مساوات د علامې په لوري (جهت) کې تغیر راځي؟
 • د پورتنۍ غیر مساوات دواړه خواوې د ۴- په عدد کې ضرب کړئ، آیا د غیر مساوات د علامې په لوري (جهت) کې تغیر راځي؟
 • که د $4 < 7$ په غیر مساوات کې د غیر مساوات د دواړو خواوو عددونه معکوس کړو، آیا د غیر مساوات د علامې په لوري (جهت) کې تغیر راځي؟

په عمومي ډول د پورتنۍ فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

د a, b, c او حقيقي عددونو لپاره لرو چې:

$$a < b \quad , \quad 0 < c \Rightarrow ac < bc$$

$$a < b \quad , \quad c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

په یاد ولرئ چې د وېش عملیه د ضرب د عملیې معکوسه عملیه ده، یعنې که وغواړو چې یو عدد پر a ووېشو، دا به بل ډول داسې ده چې دا عدد په $\frac{1}{a}$ کې ضربوو؛ نو په دې اساس د غیر مساوات د ضرب عملیې ټول خاصیتونه د وېش په عملیه کې هم د تطبیق وړ دي.

پوښتنې

د $9 < 3$ - غیر مساوات سره له یوه اختیاري منفي حقيقي عدد په جمع کولو، تفریق، ضرب او تقسیم سره د غیر مساوات ټول خاصیتونه وڅیړئ.

د لومړۍ درجه (خطي) غیر مساوات حل



د $x = 4$ او $x \leq 4$ دوی الجبري افادې په پام کې ونیسئ. ددې افادو ترمنځ څه ورته والی او څه توپیر ونیئ.

فعالیت

- د x کوم عددي قیمت د $x + 3 = 7$ په معادله کې صدق کوي.
- آیا د x په لاس راغلی قیمت څخه پرته د x بل قیمت په معادله کې صدق کوي؟
- د x د کوم عددي قیمت لپاره د $x + 3 < 7$ غیر مساوات صدق کوي.
- آیا د x په لاس راغلی قیمت څخه پرته نور قیمتونه هم شته چې په پورتنی غیر مساوات کې صدق وکړي؟
- د x د څو عددي قیمتونو لپاره پورتنی غیر مساوات صدق کوي؟

له پورتنی فعالیت څخه لیدل کېږي چې غیر مساوات د مساواتو په پرتله ډېر حلونه لري. هغه الجبري افادې چې یو له دې ($>$, $<$, \geq , او \leq) علامو په واسطه اړیکي ولري او د متحول توان یې یو وي، د لومړۍ درجې یو مجهوله او یا د خطي غیر مساوات په نامه یادېږي. د لومړۍ درجه غیر مساوات او یا خطي غیر مساوات مثالونه په لاندې ډول دي:

$$x + 3 < 0 \quad , \quad 2x - \frac{1}{3} > 3 - x$$

$$6x + 7 \leq 5 \quad , \quad \frac{x}{5} + \sqrt{2} \geq 12$$

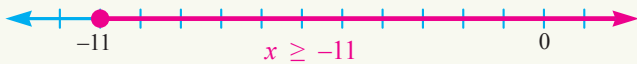
به عمومي ډول د x دهغه عددي قيمت د پيدا کولو لپاره چې په غير مساوات کې صدق وکړي، د غير مساوات د خاصيتونو په مرسته غير مساوات ته داسې تغيير ورکوو، ترڅو چې د غير مساوات په يوه خوا کې مجهول x او بلې خوا ته عددونه پاتې شي. د يوه غير مساوات له حل څخه موخه دا ده چې د هغو قيمتونو ساحه پيدا کړو چې په هغه ساحه کې غير مساوات صدق وکړي. دې ساحې ته د غير مساوات د حل ساحه وايي.

لومړی مثال: د $x + 4 \geq -7$ غير مساوات حل کړئ او د حل ساحه يې د عددونو د محور پر مخ وښيي.

حل: د غير مساوات دواړو خواوو ته د (-4) عدد جمع کوو، نو لرو چې:

$$x + 4 - 4 \geq -7 - 4$$

$$x \geq -11$$



دویم مثال: د $2x + 1 > 5$ غير مساوات حل کړئ.

حل: د غير مساوات د خاصيتونو په مرسته کولای شو په لاندې ډول معلوم عددونه د

غير مساوات يوې خوا ته او مجهول بلې خوا ته نقل کړو:

$$2x + 1 > 5$$

د غير مساوات له دواړو خواوو څخه د (-1) عدد تفریق کوو:

$$2x + 1 - 1 > 5 - 1$$

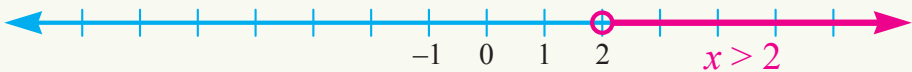
$$2x > 4$$

دواړه خواوې د 2 پر عدد وېشو او يا په $\frac{1}{2}$ کې يې ضربوو:

$$\frac{1}{2} \times (2x) > \frac{1}{2} \times 4$$

$$x > 2$$

يعنې پورتنې غير مساوات د ټولو هغو قيمتونو لپاره چې له 2 څخه لوی وي صدق کوي، د عددونو دا ساحه د عددونو پر محور په لاندې ډول ښودلای شو:



د غیر مساوات د حلولو لپاره لاندې ټکي په پام کې نیسو:

• د غیر مساوات د خاصیتونو په پام کې نیولو سره معلوم عدونه د غیر مساوات یوې خوا ته او مجهول یې بلې خوا ته نقلوو.

• معلوم عدونه یو له بل سره او مجهول عدونه یو له بله سره جمع کوو.

• د متحول د عددي قیمتونو د پیدا کولو لپاره د غیر مساوات د خاصیتونو په پام کې نیولو سره د غیر مساوات دواړه خواوې د متحول پر ضریب وپشو.

دریم مثال: د $3x + 1 < x - 5$ غیر مساوات حل کړئ.

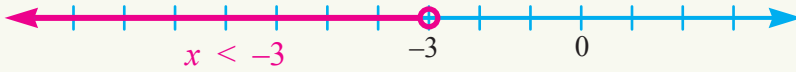
حل:

$$3x - x < -5 - 1$$

$$2x < -6$$

$$x < -\frac{6}{2}$$

$$x < -3$$



څلورم مثال: لاندې غیر مساواتونه حل کړئ.

حل:

$$x + 5 < 3x - 1$$

$$x - 3x < -1 - 5$$

$$-2x < -6$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{-6}{-2}$$

$$x > 3$$



د لاندې غير مساوات حل په لاس راوړئ او د حل ساحه يې د عددونو پر محور وښيي:

a) $4x \geq 8$

b) $8 + x < 5$

c) $5 + x < 2x - 1$

d) $-3x - 4 > x + 7$

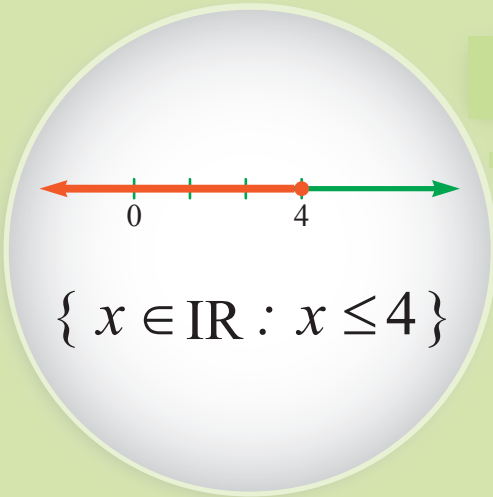
e) $\frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

f) $0.5 - x < 3x - 1$

g) $2 - x \leq 2$

h) $2x - 5 - 7x > 0$

i) $5x + 6 > 0$



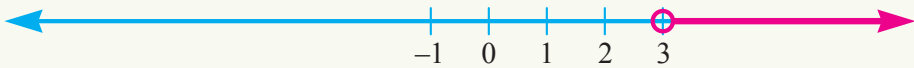
د یو غیر مساوات د حل لپاره کولای شو ډېر عددونه په لاس راوړو چې ټول دا حقیقي عددونه د یو سټ په ډول په پام کې نیسو، چې دې سټ ته د غیر مساوات د حل سټ وایو.

د مثال په ډول $x > 3$ د $3x - 2 > 7$ غیر مساوات حل دی، ځکه چې له 3 هر لوی عدد ددې غیر مساوات حل دی. د ریاضي په ژبه داسې بنودل کېږي.

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$$

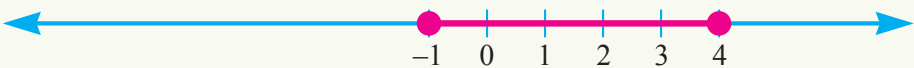
او لوستل کېږي چې د X ټول هغه قیمتونه چې په حقیقي عددونو کې شامل او له (3) څخه لوی وي.

د عددونو دا سټ د عددونو پر محور هم په لاندې ډول بنودلای شو:



لیدل کېږي چې د عددونو دا سټ د عددونو د محور یوه برخه ده، چې په ریاضي کې د انټروال په نامه یادېږي.

د عددونو په لاندې محور باندې داسې یو انټروال ټاکل شوی دی چې مساوي یا لوی له (-1) او کوچنی یا مساوي له 4 څخه وي.



دا انټروال د $[-1, 4]$ په شکل او یا د $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 4\}$ سټ په واسطه بنودل کېږي. متوجه اوسئ چې د -1 او 4 عددونه په انټروال کې شامل دي. په هغه حالت کې چې د انجرامو عددونه په انټروال کې شامل وي، داسې انټروال ته ترلی (بسته) انټروال وایي او که چیرې د -1 او 4 عددونه په انټروال کې شامل نه وي، داسې انټروال ته خلاص انټروال وایي او په لاندې ډول یې بنودلای شو:



که چیرې د مخکنې انټروال په انجمنونو کې یو عدد لکه 4 شامل وي، داسې انټروال ته نیم خلاص یا نیم تړلی انټروال وایي، او په لاندې ښودل کېږي:



په عمومي ډول د a او b حقيقي عددونو لپاره چې $a \leq b$ وي لرو:

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ د a او b تړلی انټروال

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ د a او b خلاص انټروال

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ د a او b نیم خلاص انټروال

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ د a او b نیم تړلی انټروال

متوجه اوسئ چې د عددونو د محور پر مخ کولای شو چې داسې انټروال په پام کې ونیسو چې یوه خوا یې ټاکل کیدلای نه شي او د ∞ په واسطه چې بې نهایت یې لولو ښودل کېږي، لکه: د هغه عددونو سټ چې له 4 سره مساوي او یا ترې لوی وي، داسې ښودل کېږي:



او هغه عددونه چې له 4 څخه کوچني وي، عبارت دي له:



په عمومي ډول که a یو حقيقي عدد وي، نو لرو چې:

- له a څخه لوی حقيقي عددونه $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- له a څخه لوی یا ورسره مساوي حقيقي عددونه $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- له a څخه کوچنی حقيقي عددونه $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- له a څخه کوچنی یا ورسره مساوي حقيقي عددونه $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

پوښتنې

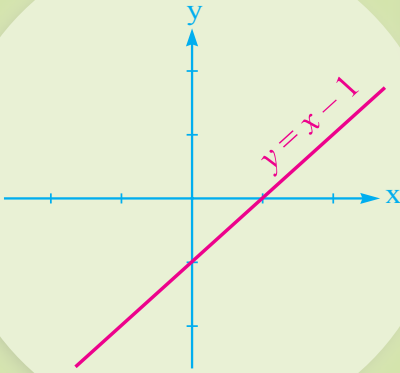
1- لاندې انټروالونه د سټ په شکل ولیکئ او د عددونو د محور پر مخ یې وښیئ.

- 1) $[5, 7]$ 2) $(9, -3)$ 3) $[-2, 8)$ 4) $(6, 1]$ 5) $[2, \infty)$

2- لاندې ستونزه د انټروال په ډول ولیکئ.

- 1) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 6\}$ 2) $B = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 5\}$
 3) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 4\}$

د لومړۍ درجه دوه حده (باينوم) د علامو ټاکل



په مخامخ شکل کې د x د کومو قیمتونو لپاره د $y = x - 1$ مستقیم خط علامه مثبت ده (له x محور څخه د پاسه) او د x د کومو قیمتونو لپاره یې علامه منفي ده (له x محور له لاندې) ده او په کومو قیمتونو د $y = x - 1$ قیمت صفر دی.

فعالیت

- د $2x - 4$ الجبري افاده شو حده ده؟
- د x د متحول په کوم قیمت ددې افادې قیمت صفر دی؟
- د x د متحول په کومو قیمتونو ددې افادې علامه مثبت ده؟
- د x د متحول په کوم قیمت ددې افادې علامه منفي ده؟
- د $P(x) = 2x - 4$ الجبري افادې گراف رسم کړئ.

د پورتنیو مفهومونو ریاضیکي بنودنه په یو جدول کې په لاندې ډول ښودل کېږي.

x	$x < 2$	2	$x > 2$
$2x - 4$	-	0	+

په دې جدول کې لیدل کېږي چې د $2x - 4$ دوه حده د $x = 2$ لپاره صفر او له 2 څخه په کوچنیو قیمتونو ددې دوه حده اشاره منفي په داسې حال کې له 2 څخه په زیاتو قیمتونو ددې دوه حده اشاره مثبت ده.

مثال: د $-\frac{1}{2}x + 3$ دوه حده علامې وټاکئ.

حل: لومړی د x هغه قیمت پیدا کوو چې دوه حده پرې صفر کېږي.

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = -3 \Rightarrow x = 6$$

بیا د x هغه قیمتونه پیدا کوو چې د دوه حده علامه په هغه قیمتونو کې مثبت ده.

$$-\frac{1}{2}x + 3 > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x > -3 \Rightarrow x < 6$$

په همدې ډول د x هغه قیمتونه چې د دوه حده علامه پرې منفي کېږي، عبارت دي له:

$$-\frac{1}{2}x + 3 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x < -3 \Rightarrow x > 6$$

په لاس راغلی پایلې په لاندې جدول کې په لنډ ډول لیکو:

x	$x < 6$	6	$x > 6$
$-\frac{1}{2}x + 3$	+	0	-

یادونه: په عمومي ډول $ax + b$ د دوه حده علامو د ټاکلو لپاره اول د متحول هغه قیمتونه

په لاس راوړو چې دوه حده پرې صفر کېږي، یا د دوه حده جذر پیدا کوو که $a > 0$ وي، د

دوه حده علامه له جذر څخه په زیاتو قیمتونو د a په شان او له جذر څخه په کوچنیو قیمتونو

د a مخالفه علامه لري او که $a < 0$ وي له جذر څخه په زیاتو قیمتونو د a مخالفه او له

a څخه په کوچنیو قیمتونو د a مطابقه علامه لري او د علامو د ټاکلو جدول په لاندې ډول

جوړوو.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a} < x$
$ax + b$	د a مخالفه علامه	0	د a مطابقه علامه

که $a > 0$ وي:

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a} < x$
$ax + b$	د a مطابقه علامه	0	د a مخالفه علامه

که $a < 0$ وي:

پوښتنې

د لاندې الجبري افادو علامې (شارې) وټاکئ.

1) $3x - 9$

2) $7x - 2$

3) $\frac{3}{4}x - 1$

4) $0.5x + 10$

5) $2x - 4 + x - 1$

6) $\frac{1}{2}x + 3$

د شپږم څپرکي لنډيز

• که چيرې عددونه د ($\geq, >, \leq, <$) علامو په واسطه يو له بله سره اړيکه ولري، د غير مساوات په نامه يادېږي.

• که د يوه غير مساوات دواړو خواوو ته يو حقيقي عدد جمع او يا يې ترې تفریق کړو، د غير مساوات په جهت کې تغير نه راځي.

• که د يوه غير مساوات دواړه خواوې په يوه مثبت حقيقي عدد (چې صفر نه وي) کې ضرب او يا يې پرې وپېشو د غير مساوات په جهت کې تغير نه راځي.

• که د يوه غير مساوات دواړه خواوې په منفي حقيقي عدد (چې صفر نه وي) ضرب او يا يې پرې وپېشو، د غير مساوات جهت تغير کوي.

$$[a, b] = \{x \in IR : a \leq x \leq b\} \quad \text{ترلی انتروال}$$

$$(a, b) = \{x \in IR : a < x < b\} \quad \text{خلاص انتروال}$$

$$[a, b) = \{x \in IR : a \leq x < b\} \quad \text{د } a \text{ له خوا نیم خلاص انتروال}$$

$$(a, b] = \{x \in IR : a < x \leq b\} \quad \text{د } a \text{ له خوا نیم ترلی انتروال}$$

د شپږم څپرکي پوښتنې

په لاندې پوښتنو کې هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب وټاکئ:

1- له لاندې غير مساوات څخه کوم يو سم دی؟

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{6} \leq 2 - \frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$

c) $\sqrt{9+16} \geq 5$

d) د a, b او c ځوابونه سم دي

2- له لاندینو ستونو څخه کوم يو يې د $x + 3 \leq 5$ غير مساوات حل دی؟

a) $\{x \in IR : x \leq 2\}$

b) $\{x \in IR : 2 \leq x\}$

c) $\{x \in IR : x \leq 8\}$

d) $\{x \in IR : x < -2\}$

3- له لاندینیو ستونو څخه کوم یو یې د $2x + 3 > -1$ د غیر مساوات حل دی؟

- a) $[-2, \infty)$ b) $(2, \infty)$ c) $(1, \infty)$ d) $(-2, \infty)$

4- که $0 < a < b$ وي، له لاندینیو اړیکو څخه کومه یوه اړیکه سمه ده؟

- a) $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ b) $\frac{-1}{b} < \frac{-1}{a}$ c) $-b < -a$ d) c او b, a ځوابونه سم دي

• تش ځایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

1- د ټولو هغه سټ چې د $ax + b < 0$ په غیر مساوات کې صدق وکړي د پورتنۍ غیر مساوات د حل سټ بلل کېږي.

2- د $[4, 5]$ انټروال د انټروال په نوم یادېږي.

3- د $2x + 4$ دوه حده د قیمتونو لپاره منفي کېږي.

• له لاندې جملو څخه کومه یوه سمه او کومه یوه یې ناسمه ده د سمې مخې ته د (س) او د ناسمې مخې ته د (ن) توری ولیکئ.

1- () د یو غیر مساوات د حل سټ یو عنصر لري.

2- () $\{x \in R : 2 \leq x < 5\}$ سټ یو تړلی انټروال دی.

3- () د لومړۍ درجه یو مجهوله غیر مساوات (خطي غیر مساوات) د حل د سټ عناصر هر وخت د شمېرلو وړ نه دي.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- د لاندې غیر مساواتونو د حل سټ په لاس راوړئ.

- a) $x - 2 < 3(2x - 9)$ b) $(x + 3)(x - 3) < 0$

2- لاندې انټروالونه د عددونو د محور پر مخ وښیئ.

- a) $[-1, 2]$ b) $(-2, 1]$ c) $[-1, 1)$ d) $(-2, 2)$

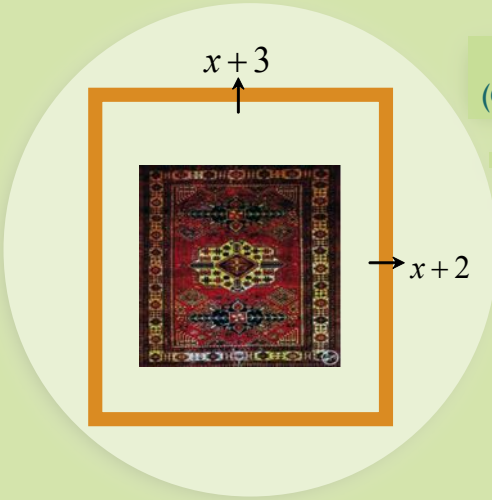
3- د عددونو لاندې ستونزه د انټروال په شکل ولیکئ او د عددونو د محور پر مخ یې وښیئ.

- a) $\{x \in IR : x \leq 2\}$ b) $\{x \in IR : x \leq 5\}$
c) $\{x \in IR : -1 \leq x \leq 6\}$ d) $\{x \in IR : -4 < x < 2\}$

اووم خپرکی
یو مجهوله دویمه درجه
معادلی



یو مجهوله دویمه درجه معادلې (Quadratic Equations)



د مخامخ شکل په شان که چیرې یوه کوټه د یوې مربع شکله قالینې په واسطه داسې فرش شوی وي چې د قالینې له څنډې څخه د کوټې اوږدوالی $3m$ او سوربې $2m$ زیات وي، ددې کوټې مساحت څومره دی؟

فعالیت

- الجبري افاده تعریف کړئ.
- معادله تعریف کړئ.
- د لومړۍ درجې یو مجهوله معادلې یو مثال ولیکئ.
- د لومړۍ درجې یو مجهوله معادلې عمومي شکل ولیکئ.
- د $(x-2)(x+3) = 0$ په معادله کې د دواړو قوسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.
- د پورتنی معادلې درجه د $x + 4 = 3x - 1$ معادلې له درجې سره پرتله کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

هغه معادلې چې یو مجهول ولري او درجه یې دوه وي، د یو مجهوله دویمې درجې معادلې په نامه یادېږي، چې عمومي شکل یې $ax^2 + bx + c = 0$ ، چې $a \neq 0$ ، b او c حقیقي عددونه او x د معادلې مجهول دی. کیدای شي چې په خاصو حالتونو کې $b = 0$ یا $c = 0$ او یا دواړه صفر وي ($b = c = 0$)، داسې معادلو ته نیمگړي دویمه درجه معادلې هم وایي.

لومړی مثال: داسې عدد پیدا کړئ چې د عدد مربع له عدد څخه د 6 په اندازه زیاته وي.

حل: که عدد ته x ووايو، نو پورتنی پوښتنه د ریاضي په شکل داسې لیکو:

$$x^2 = 6 + x \quad \text{یا} \quad x^2 - x - 6 = 0$$

د دې ډول معادلو د حل لپاره باید له داسې لارې (طریقې) څخه کار واخلو، ترڅو ددې معادلې حلونه په لاس راشي، ددې ډول مثالونو حل به په راتلونکي لوست کې وڅېړو.

دویم مثال: په لاندې معادلو کې د a ، b او c ضریبونه ولیکئ.

a) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $3x - x^2 = 4$

c) $4x^2 - 1 = 0$

d) $7x^2 = 49$

حل:

اجزاوې	معادلې	د a ضریب	د b ضریب	د c ضریب
a	$2x^2 - 4x + 1 = 0$	2	-4	1
b	$3x - x^2 = 4$	-1	3	-4
c	$4x^2 - 1 = 0$	4	0	-1
d	$7x^2 = 46$	7	0	-49

پوښتنې

1- په لاندې معادلو کې پوره او نیمگړی معادلې سره بیلې کړئ.

a) $6 - 2x + x^2 = 0$ b) $5x^2 - 3x + 1$ c) $\sqrt{2}x^2 - 4x = 0$ d) $-x^2 = 3$

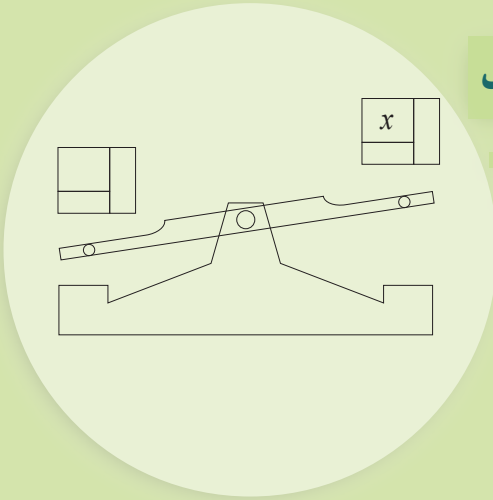
2- په لاندې معادلو کې د a ، b او c ضریبونه وښیئ.

a) $6x^2 - 4x = 2$

b) $3x - 4 = x^2$

c) $4x - x^2 - 6 = 4x^2$

د یو مجهوله دویمو درجو معادلو حل



آیا کولای شی چې د x لپاره داسې قیمت پیدا کړئ چې تله د تعادل په حالت کې راشي.

فعالیت

x	$2x + 4$	$3x - 1$
-3		
-2		
0		
5		

• د $2x + 4 = 3x - 1$ معادلې حل پیدا کړئ.

• په مخامخ جدول کې د x د بېلابېلو قیمتونو لپاره پورتنی مساوات وڅېړئ.

• پورتنی جدول او پورتنی پوښتنې ته په پام کولو سره ووايئ چې د معادلې د حل پیدا کول یعنې څه؟

• مخامخ جدول پوره او د هغې له مخې د $x^2 - 4x + 3 = 0$ معادلې حل په لاس راوړئ.

x	$x^2 - 4x + 3$
-3	
-2	
-1	
0	
1	

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

هغه قیمتونه چې په یوه دویمه درجه معادله کې صدق وکړي، د یو مجهوله دویمې درجې معادلې د حل په نامه یادېږي.

لومړی مثال: هغه عدد پیدا کړئ چې مربع یې د 12 په اندازه له عدد څخه لویه وي.

حل: که چیرې عدد ته x ووايو، نو الجبري شکل به یې په لاندې ډول وي.

$$x^2 = x + 12$$

څرنګه کولای شو، چې له پورتنی مساوات څخه یې حل پیدا کړو.

که چیرې $x = 1$ په معادله کې وضع کړو، لیدل کېږي چې د مساوات ښي خوا د 13 عدد او کینه خوا د 1 سره مساوي کېږي.

که د $x = 2$ قیمت په معادله کې وضع کړو، نو د مساوات ښي خوا ته د 14 عدد او کینې خوا ته د 4 عدد په لاس راځي او په معادله کې د $x = 3$ لپاره ښي خوا ته د 15 عدد او کینه خوا ته د 9 له عدد سره مساوي کېږي.

په همدې ډول که $x = 4$ په معادله کې وضع کړو، نو ښي خوا ته د 16 عدد او کینې خوا ته هم 16 عدد په لاس راځي، چې $16 = 16$ دی، نو $x = 4$ د معادلې یو حل دی.

x	x^2	$x + 12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

د معادلې حل د پیدا کولو لپاره د پورتنۍ طریقې لاندیز کولای شو په یوه جدول کې داسې ولیکو:

آیا کولای شو چې د دویمې درجې معادلې د حل د پیدا کولو لپاره یوه عمومي طریقه په لاس راوړو؟

دویم مثال: یو داسې عدد پیدا کړئ چې که له مربع سره یې 1 جمع شي، له صفر سره مساوي شي.

حل: که چیرې دې عدد ته x ووايو، د پورتنۍ پوښتنې الجبري افاده عبارت ده له:

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

د پورتنۍ طریقې په څېر د اټکل شوو عددونو په وضع کولو سره د معادلې د حل په پیدا کولو پیل کوو، ددې کار لپاره د پورتنۍ جدول په شان مخامخ جدول په پام کې نیسو.

له دې جدول څخه لیدل کېږي چې د x لپاره داسې قیمت نه شو پیدا کولای چې د معادلې دواړې خواوې مساوي کړای شي.

له بلې خوا له معادلې څخه هم دا راڅرگندېږي چې داسې حقيقي عدد نشته چې له مربع سره

یې (1) جمع کړو او له صفر سره مساوي شي، نو دا دویمه درجه معادله حل نه لري.

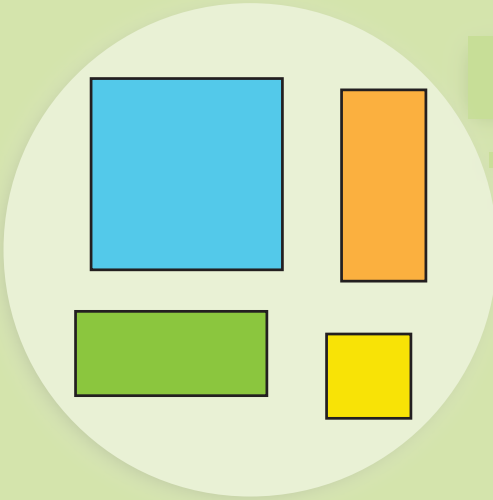
پوښتنې

1- یوه داسې دویمه درجه یو مجهوله معادله ولیکئ چې حل و نه لري.

2- لاندې معادلې حل کړئ.

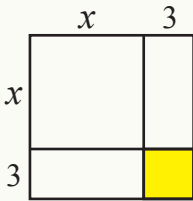
a) $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 = 0$

د دویمې درجې معادلو حل د تکمیل مربع په طریقه



کوبښن وکړئ ددې شکلونو په یو ځای کېدو سره یوه لویه مربع جوړه کړئ.

فعالیت



- د لویې مربع د ضلعې اوږدوالی څومره دی.
- د هرې برخې مساحت د شکل پر مخ ولیکئ.
- $x^2 + 6x - 40 = 0$ معادله په پام کې ونیسئ او داسې یې ترتیب کړئ چې ثابت عدد د مساوي د علامې یوې خواته او متحول لرونکي حدونه یې بلې خواته وي. $x^2 + 6x = 40$
- د لویې مربعې مساحت څومره دی؟
- د دې لپاره چې متحول لرونکي الجبري افاده د لویې مربعې له مساحت سره برابره شي، کوم عدد باید د مساوات دواړو خواوو ته ورزیات کړو.
- له په لاس راغلي اړیکې څخه د x قیمت (د دویمې درجې معادلې حل) په لاس راوړئ.

د پورتنی فعالیت د سرته رسولو په پایله کې کولای شو چې ووايو: محمد بن موسی د دویمې درجې معادلو حل لپاره دا طریقه پیدا کړله. په عمومي ډول د دویمو درجو معادلو په حل کې له دې طریقې څخه کار اخیستل کېږي. په دې طریقه کې د $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله د $(x + p)^2 = q^2$ په شکل بدلېږي چې د تجزیې پړاوونه یې عبارت دي له:

په هغه حالت کې چې $a = 1$ وي.

• لومړی p د x د ضریب له نیمایي سره مساوي نیسو، یعنې $P = \frac{b}{2}$

• وروسته $q^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ وضع کوو.

• په پای کې د $x + p = q$ معادله لرو.

مثال: د $x^2 + 2x - 8 = 0$ معادله د تکمیل مربع په طریقه حل کړئ.

حل: لومړی معادله په لاندې ډول لیکو:

$$x^2 + 2x = 8$$

د x د ضریب د نیمایي مربع له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2 + 2x + 1^2 = 8 + 1^2$$

$$x^2 + 2x + 1 = 9$$

$$(x+1)^2 = 9$$

$$x+1=3 \Rightarrow x=2, \quad x=-4$$

پوښتنې

لاندې دویمه درجې معادلې د تکمیل مربع په طریقه حل کړئ.

a) $x^2 + 8x - 24$ b) $x^2 - x - \frac{5}{4} = 0$ c) $x^2 - 6x - 13 = 0$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

د $ax^2 + bx + c = 0$ د معادلې دواړه خواوې د x^2 پر ضریب ووبشئ او ووايئ چې مخامخ مساوات سم دی. که نه؟

ومو لیدل چې دویمې درجې معادله عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی، چې په هغې کې a, b او c حقیقي عددونه او a د صفر خلاف یو عدد دی، د دې معادلې د حل لپاره به لاندې ډول عمل کوو:

• د $ax^2 + bx + c = 0$ معادلې دواړه خواوې په a باندې ووبشئ.

• ثابت عددونه د مساوات یوې خوا ته مجهول بلې خوا ته نقلوو او د x د ضریب د نیمایي مربع له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

د لاندې لیکنې لپاره $b^2 - 4ac$ په Δ سره ښودل کېږي.

فعالیت

د $ax^2 + bx + c = 0$ هرې دویمې درجې معادلې لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه ووايئ:

1- که $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ وي؛ نو په دې حالت کې د معادلې حل کوم دی؟

2- که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ وي؛ نو په دې حالت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

3- که $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ وي؛ ایا معادله د حقیقي عددونو په سټ کې حل لري؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي:

لومړۍ پایله: د $ax^2 + bx + c = 0$ په معادله کې چې a, b او c حقیقي عددونه او

$a \neq 0$ وي، $\Delta = b^2 - 4ac$ د قاسمې په نوم یادېږي، لرو چې:

1- که $\Delta > 0$ وي، معادله دوه مختلف حقيقي جذرونه لري چې عبارت دي؛ له:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

يا

2- که $\Delta = 0$ شي معادله دوه مساوي حقيقي يا مضاعف جذر لري چې عبارت دي له:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3- که $\Delta < 0$ وي معادله په حقيقي عددونو کې حل نه لري.

دويمه پايله: د جذرونو د جمعې او ضرب حاصل عبارت دی له:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

لومړی مثال: د $x^2 - 3x + 1 = 0$ معادلې حل (جذرونه) پيدا کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 1 = 5$$

حل: لومړی د Δ قيمت پيدا کوو:

څرنګه چې $\Delta > 0$ ده، نو معادله دوه حلونه لري.

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

دويم مثال: د $9x^2 - 12x + 4 = 0$ معادلې حل (جذرونه) پيدا کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4 \times 9 \times 4) = 144 - 144 = 0$$

حل: لرو چې:

څرنګه چې $\Delta = 0$ ده يو مضاعف جذر يا دوه مساوي حلونه لري:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

درېم مثال: د $5x^2 + 3x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: دا معادله حل نه لري، ځکه چې $\Delta < 0$ ده يعنې:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 5 \times 1 = 4 - 20 = -16$$

څلورم مثال: د $4x^2 - 3x - 1 = 0$ معادلې د جذرونو د جمعې او ضرب حاصل پيدا کړئ.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

پوښتنې

لاندي معادلې حل کړئ

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$

د اووم څپرکي لنډيز

- د دويمې درجې معادلې عمومي شکل د $ax^2 + bx + c = 0$ دی چې $(a \neq 0)$ وي.
- هغه دويم درج معادله چې $b = 0$ وي، د $ax^2 + c = 0$ ، که $c = 0$ وي $ax^2 + bx = 0$ شکل لري او د دويمې درجې نیمگرو معادلو په نامه يادېږي.
- د دويمې درجې معادلې د جذرونو د جمعې حاصل د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ او د جذرونو د ضرب حاصل يې $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ څخه په لاس راځي.
- د هرې دويمې درجې معادلې جذرونه (حلونه) د $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ له فورمول څخه په لاس راځي چې $\Delta = b^2 - 4ac$ ده.
- که چيرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حقيقي مختلف جذرونه لري.
- که چيرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مساوي حلونه (جذرونه) يا يو مضاعف جذر لري.
- که چيرې $\Delta < 0$ وي، معادله د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري.
- که x_1 او x_2 دويمې درجې معادلې جذرونه وي، نو معادله يې د $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ يا $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ له فورمول څخه په لاس راځي.

د اووم څپرکي پوښتنې

• په لاندې پوښتنو کې هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې

وښیئ.

1- د $4x = 3x^2 - 1$ په معادله کې د a, b, c او c ضریبونه عبارت دي له:

الف) $a = 3, b = 4, c = 1$ (ب) $a = -3, b = 4, c = 1$

ج) $a = 4, b = 3, c = -1$ (د) هیڅ یو

2- د $3x^2 - 8x + 5 = 0$ د معادلې حل (جذرونه) عبارت دي له:

الف) $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{3}$ (ب) $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = 1$

ج) الف او ب (د) هیڅ یو

3- د $x^2 - 10x + 16 = 0$ د معادلې د جذرونو د جمعې حاصل عبارت دی له:

الف) $x_1 + x_2 = 5$ (ب) $x_1 + x_2 = -5$

ج) $x_1 + x_2 = 8$ (د) $x_1 + x_2 = 10$

4- که چیرې په یوه دویمه درجه معادله کې $\Delta > 0$ وي، نو معادله:

الف) دوه مساوي حقيقي جذرونه لري (ب) معادله دوه حقيقي مختلف جذرونه لري

ج) حل نه لري (د) یو حل لري

• تش ځایونه ډک کړئ.

1- د یوې یو مجهوله دویمې درجې معادلې عمومي شکل دا دی.

2- $-\frac{b}{a}$ د جذرونو او $\frac{c}{a}$ د جذرونو دی.

3- که وي، معادله حل نه لري.

4- که د معادلې درجه دوه وي، معادله لري.

• لاندې پوښتنې ولولئ د سمې پوښتنې مخ ته د(س) او د ناسمې مخ ته د(ن) توري ولیکئ.

1- () که $b^2 - 4ac < 0$ وي، معادله د حقیقي عددونو په ست کې حل نه لري.

2- () $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ د محمد بن موسی فورمول دی.

3- () که x_1 او x_2 د دویمې درجې معادلې جذرونه وي، نو د معادلې د تشکیل لپاره

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \text{ له فورمول څخه کار اخلو.}$$

4- () هغه معادله چې یو مجهول ولري او درجه یې دوه وي، د یو مجهوله دویمې درجې

معادلې په نامه یادېږي.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- په لاندې معادلو کې د a, b او c ضریبونه وښیئ او هم ووايئ کومه معادله یوه کامله او کومه

یوه ناقصه دویمه درجه معادله ده.

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $3x^2 - 1 = 0$

c) $2x^2 - 6x = 0$

2- لاندې معادلې د تکمیل مربعې په طریقه حل کړئ.

a) $4x^2 + 3x - 1 = 0$

b) $x^2 + \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$

c) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

d) $x^2 + 3x = 0$

3- د محمد بن موسی د فورمول په مرسته دلاندینیو معادلو جذرونه پیدا کړئ.

a) $7x^2 - 8x + 1 = 0$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

c) $t^2 - 0.27 + 0.6t = 0$

4- هغه دویمه درجه معادلې تشکیل کړئ چې جذرونه یې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

a) $-2, 0.5$

b) $3, -1$

c) $0, 2$

d) $\sqrt{2} - 1, 2$